



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2014-2015

Raphaël Danchin et Bernard Ducomet

Résultats d'existence globale et limites asymptotiques pour un modèle de fluide radiatif

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2014-2015), Exposé n° VII, 17 p.

<http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2014-2015____A7_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2014-2015.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

RÉSULTATS D'EXISTENCE GLOBALE ET LIMITES ASYMPTOTIQUES POUR UN MODÈLE DE FLUIDE RADIATIF

RAPHAËL DANCHIN*, BERNARD DUCOMET**

*Université Paris-Est, LAMA (UMR 8050), UPEMLV, UPEC, CNRS, Institut Universitaire de France,
61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex 10

**CEA, DAM, DIF, Département de Physique Théorique et Appliquée
F-91297 Arpajon, France

RÉSUMÉ. On s'intéresse à un modèle simplifié d'hydrodynamique radiative consistant en un couplage entre les équations de Navier-Stokes compressibles de la mécanique des fluides classique, et l'*approximation P1* de l'équation de transport gouvernant l'évolution de l'intensité radiative. Dans un cadre fonctionnel à régularité critique, nous démontrons l'existence globale à données proches d'un état d'équilibre linéairement stable. Nous discutons également diverses asymptotiques physiquement pertinentes, et détaillons celle qui correspond à la limite à faible nombre de Mach.

1. INTRODUCTION

En mécanique classique, la plupart des modélisations des fluides compressibles reposent sur les équations de Navier-Stokes compressibles générales qui, en description eulérienne, gouvernent l'évolution de la vitesse $u = u(t, x)$, de la densité $\rho = \rho(t, x)$ et de la température $\theta = \theta(t, x)$ en tout point x du domaine du fluide Ω , et en tout temps $t \in \mathbb{R}^+$. Dans la suite de l'exposé, on supposera toujours que Ω est l'espace entier \mathbb{R}^n ou la boîte périodique \mathbb{T}^n , avec $n \geq 2$.

On souhaite ici prendre en compte les effets radiatifs présents, par exemple, dans la modélisation de l'évolution stellaire [25], ou dans certains problèmes d'environnement à haute température [27]. Pour cela, on suit l'approche de [26] : en tout point de Ω , les forces radiatives sont des quantités moyennées sur l'ensemble des directions ω de la sphère unité \mathcal{S}^{n-1} et des fréquences $\nu \geq 0$ des photons. Elles mettent en jeu une *densité d'intensité radiative* $\mathcal{I} = \mathcal{I}(t, x, \omega, \nu)$ qui vérifie une équation de transport avec relaxation. Le terme de relaxation tend à ramener \mathcal{I} vers une distribution d'équilibre $B = B(t, x, \omega, \nu)$. Un exemple courant de distribution est la *planckienne* :

$$(1) \quad B(t, x, \omega, \nu) = \frac{2h^{-3}}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k} - 1},$$

où h et k sont, respectivement, les constantes de Planck et de Boltzmann.

Pour simplifier la présentation, nous allons nous placer d'emblée dans le cadre barotropique (i.e. la pression et les différents coefficients du système ne dépendent que de la densité), auquel cas la fonction de distribution doit dépendre de la densité, et non plus de la température : $B = B(t, x, \omega, \nu, \rho)$.

Dans ce cadre, les équations régissant l'évolution du fluide considéré sont composées de :
 – L'équation de conservation de la masse :

$$(2) \quad \partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho u) = 0.$$

– L'équation de conservation du moment :

$$(3) \quad \partial_t (\rho u) + \operatorname{div}_x (\rho u \otimes u) + \nabla_x p = \operatorname{div}_x (\mu (\nabla_x u + {}^t \nabla_x u)) + \nabla_x (\operatorname{div}_x u) - S_F,$$

avec $p = P(\rho)$ la pression, la fonction P étant supposée régulière. Les coefficients de viscosité μ et λ sont également des fonctions régulières de ρ et vérifient :

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad \lambda + 2\mu > 0.$$

– L'équation du transfert radiatif (introduite par Chandrasekhar dans [4]) :

$$(4) \quad \frac{1}{c} \partial_t \mathcal{I} + \operatorname{div}_x \mathcal{I} = S,$$

où c est la vitesse de la lumière.

La force radiative S_F est donnée par la relation

$$S_F = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{\mathcal{S}^{n-1}} S \, d\omega \, d\nu$$

où la source radiative S (apparaissant aussi dans (4)) est somme d'un terme d'émission-absorption $S_{a,e}$ donné par

$$S_{a,e} := a(\rho, \mathcal{I}) - \mathcal{I}$$

et d'un terme de diffusion S_s vérifiant :

$$S_s := s(\rho, \mathcal{I}) - \mathcal{I} \quad \text{où} \quad \mathcal{I} := \frac{1}{|\mathcal{S}^{n-1}|} \int_{\mathcal{S}^{n-1}} \mathcal{I} \, d\omega.$$

Les coefficients de transport $a(\rho, \mathcal{I})$ et $s(\rho, \mathcal{I})$ sont des fonctions positives données. Enfin, comme indiqué plus haut, la fonction de distribution $B(\rho, \mathcal{I})$ doit être vue comme un équivalent barotrope de la planckienne définie en (1).

Le système (2), (3), (4) (et sa version non barotrope) est un modèle simplifié d'hydrodynamique radiative (cf [24], [26]), dont certains régimes limites ont été proposés par Lowrie, Morel et Hittinger [23] et plus récemment par Buet et Després [2].

L'étude mathématique des modèles de fluides radiatifs n'en est qu'à ses débuts. L'existence globale de solutions faibles d'énergie finie a été établie par Ducomet-Feireisl-Nečasova [12]. Dans ce contexte, l'asymptotique à faible nombre de Mach ainsi que les limites de diffusion ont été étudiées très récemment par Ducomet-Nečasova dans [15, 16, 18]. Notons enfin que des travaux plus numériques sont disponibles dans Dubroca and Feugeas [11], Levermore [20], Lin [21], et Lin, Coulombel et Goudon [22].

Sauf en dimension 1 (voir [13] et [14]), et dans le cas de données très régulières en dimension 3 (voir [17]), la théorie des solutions fortes, et de leur unicité est largement ouverte. Cet exposé vise à pallier ce manque et, en particulier, à donner un résultat d'existence globale de solutions uniques pour des petites perturbations d'un état de référence constant linéairement stable. Le traitement des variables ρ et \mathcal{I} étant mal compris dans le cadre des solutions fortes globales modérément régulières, nous allons nous autoriser trois simplifications supplémentaires (mais néanmoins classiques) dans le modèle, reposant sur :

- (1) une hypothèse d'isotropie : les coefficients de transport radiatif a et s ne dépendent pas de \mathcal{I} ;

- (2) l'hypothèse « grise » : \bar{a} et \bar{s} ne dépendent pas de la fréquence (i.e. tous les photons sont « gris ») ;
 (3) l'hypothèse P1 : l'intensité I moyennée sur les fréquences (i.e. $I \equiv \int_0^\infty \mathcal{I} d$) est remplacée par le développement suivant :

$$(5) \quad I = I_0 + I_1,$$

avec I_0 et I_1 indépendants de \bar{a} et de \bar{s} .

En injectant (5) dans (4), en prenant les moments d'ordre 0 et d'ordre 1 en \bar{a} , puis en intégrant sur $\mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, on obtient les équations d'évolution suivantes (où l'on a gardé la notation B pour la fonction de distribution intégrée par rapport à \bar{a}) :

$$(6) \quad \frac{1}{c} \bar{t} I_0 + \frac{1}{n} \operatorname{div}_x I_1 = \bar{a}(\bar{a}) (B(\bar{a}) - I_0),$$

$$(7) \quad \frac{1}{c} \bar{t} I_1 + \nabla_x I_0 = (\bar{a}(\bar{a}) + \bar{s}(\bar{a})) I_1.$$

Par ailleurs, sous les hypothèses ci-dessus, la force radiative s'écrit

$$(8) \quad S_F = \frac{\bar{a}(\bar{a}) + \bar{s}(\bar{a})}{n} I_1.$$

En conséquence, l'approximation P1, combinée aux hypothèses grises et d'isotropie, permet de se ramener à la résolution du système déterministe composé de (2), (3) (avec force radiative donnée par (8)), (6) et (7).

Afin de bien identifier les régimes asymptotiques pertinents dans les applications, il est coùtumier de récrire le système sous forme *adimensionnelle*. Concrètement, on fixe un temps \bar{T} , une vitesse \bar{U} , une densité $\bar{\rho}$, une pression \bar{p} , une viscosité $\bar{\mu}$, une intensité \bar{I} , des coefficients radiatifs \bar{a} et \bar{s} , et une distribution d'équilibre \bar{B} de référence, et l'on forme six nombres sans dimension. Tout d'abord :

$$Sr := \bar{L}/\bar{T}\bar{U}, \quad Ma := \bar{U}/\sqrt{\bar{p}}, \quad Re := \bar{U}\bar{L}/\bar{\mu}$$

appelés respectivement les nombres de Strouhal, Mach, Reynolds relatifs à la partie hydrodynamique du système, puis trois autres nombres sans dimension relatifs aux phénomènes radiatifs :

$$\mathcal{C} := c/\bar{U}, \quad \mathcal{L} := \bar{L}\bar{a}, \quad \mathcal{L}_s := \bar{L}\bar{s}.$$

On définit alors des inconnues renormalisées t, I_0 , etc, dépendant des variables renormalisées \bar{t}, x , et des coefficients renormalisés a, μ , etc, par les relations

$$(t, x) = \bar{a}(\bar{T}\bar{t}, \bar{L}x), \quad I_0(t, x) = \bar{I}_0 I_0(\bar{T}\bar{t}, \bar{L}x), \quad a = \bar{a} a, \quad \text{etc.}$$

En supposant que $\bar{B} = \bar{I}$, on obtient ainsi un nouveau système vérifié par (t, u, I_0, I_1) mettant en jeu les nombres sans dimension définis ci-dessus. En omettant désormais les chapeaux sur les inconnues et variables renormalisées, ainsi que la dépendance en x pour les opérateurs différentiels ∇_x et div_x , on obtient finalement le système *sans dimension* suivant :

$$Sr \bar{t} + \operatorname{div}(u) = 0,$$

$$Sr \bar{t}(u) + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{Ma^2} \nabla p - \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\mu \nabla u + {}^t \nabla u) + \nabla(\operatorname{div} u) = \mathcal{L} \frac{\bar{a} + \mathcal{L}_s \bar{s}}{n} I_1,$$

$$\frac{Sr}{c} \bar{t} I_0 + \frac{1}{n} \operatorname{div} I_1 = \mathcal{L} a (B - I_0),$$

$$\frac{Sr}{c} \bar{t} I_1 + \nabla I_0 = -\mathcal{L} (a + \mathcal{L}_s \bar{s}) I_1.$$

Dans la suite, pour limiter le nombre de paramètres, on supposera que $Sr = \mathcal{L}_S = 1$ et, pour simplifier les calculs, on prendra tous les coefficients du système indépendants de ε (mais une dépendance régulière conduirait aux mêmes résultats).

On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy associé au système ci-dessus avec $Sr = \mathcal{L}_S = 1$ pour des perturbations de la solution de référence constante :

$$= 1, u = 0, I_0 = B(1), I_1 = 0, \quad \text{sous l'hypothèse } B'(1) > 0, \quad \rho'(1) > 0.$$

Comme nous nous concentrerons sur des petites perturbations et que $B'(1) > 0$, nous allons travailler avec l'inconnue $b := (B(\cdot) - B(1))/B'(1)$ plutôt qu'avec la densité ρ . Ce changement d'inconnue a l'avantage de rendre la partie radiative du système (i.e. les deux dernières équations) complètement linéaire. En réécrivant les différentes fonctions dépendant de ρ en terme de b , on obtient finalement le système suivant pour $b, u, j_0 := I_0 - B(1)$ et $j_1 := I_1$:

$$(9) \quad \begin{aligned} & \rho b + u \cdot \nabla b + (1 + k_1(b)) \operatorname{div} u = 0, \\ & \rho u + u \cdot \nabla u - \frac{1}{Re} (1 + k_2(b)) \mathcal{A}u + \frac{\rho'(1)}{Ma^2} (1 + k_3(b)) \nabla b = \frac{\mathcal{L}(\rho + s)}{n} (1 + k_4(b)) j_1, \\ & \rho j_0 + \frac{1}{n} \mathcal{C} \operatorname{div} j_1 = \mathcal{C} \mathcal{L}(\rho + s) (B'(1) b - j_0), \\ & \rho j_1 + \mathcal{C} \nabla j_0 = -\mathcal{C} \mathcal{L}(\rho + s) j_1, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{A} := \mu + (\rho + \mu) \nabla \operatorname{div}$ et k_1, k_2, k_3, k_4 des fonctions régulières (explicites) s'annulant en 0.

Ce système peut être vu comme un couplage par des termes d'ordre inférieur entre le système de Navier-Stokes compressible classique et un système hyperbolique symétrique linéaire d'ordre 1. La théorie de l'existence locale ne présente donc pas de difficultés particulières par rapport à celle du système de Navier-Stokes compressible barotrope (voir [7] pour plus de détails). De ce fait, nous allons désormais nous concentrer sur le problème de l'existence globale pour des petites perturbations d'un état de référence *linéairement stable*.

Pour ce faire, il convient avant toute chose de trouver un cadre fonctionnel adéquat. Comme pour le cas sans radiation [5], nous allons adopter l'approche à *régularité critique* reposant sur le fait que si l'on néglige les termes d'ordre inférieur dans la conservation de la masse et du moment alors les deux premières équations de (9) sont invariantes pour tout $\varepsilon > 0$ par le changement d'échelle

$$b(t, x), u(t, x) \rightsquigarrow b(\varepsilon^2 t, \varepsilon x), u(\varepsilon^2 t, \varepsilon x).$$

Une contrainte supplémentaire due au caractère hyperbolique symétrique de la partie radiative du système, est que ce cadre fonctionnel doit être plus ou moins lié à l'espace L^2 . Conjugué au fait que la densité (donc b) doit être contrôlée dans L^∞ afin, entre autres, de justifier notre réécriture du système, nous allons déjà supposer que b_0 et u_0 appartiennent respectivement aux espaces de Besov homogènes¹ $\dot{B}_{2,1}^{n/2}$ et $\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}$, sachant que l'injection de $\dot{B}_{2,1}^{n/2}$ dans L^∞ est critique. Vu la nature des équations vérifiées par (j_0, j_1) , travailler dans le même espace pour j_0 et j_1 semble inéluctable. Enfin, une analyse un peu plus poussée du

1. Comme dans [1], on définit l'espace de Besov $\dot{B}_{2,1}^s$ sur \mathbb{R}^n comme étant l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-s} (\mathcal{D}_\lambda f) = 0$ dans L^∞ , et $\|f\|_{\dot{B}_{2,1}^s} < \infty$, où $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ est une fonction régulière, radiale, supportée dans $B(0, 1)$ et valant 1 sur $B(0, 1/2)$.

On rappelle que $\|f\|_{\dot{B}_{2,1}^s} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{sk} \|\dot{\Delta}_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ où $(\dot{\Delta}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est la décomposition de Littlewood-Paley associée à φ , i.e. $\dot{\Delta}_k f := (2^{-k} \mathcal{D}) f$ avec $(\mathcal{D}) := (\varphi(\cdot/2) - \varphi(\cdot))$.

couplage entre les différentes équations dans l'optique d'un résultat d'existence global permet d'opter pour :

$$b_0 \in \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1} \cap \dot{B}_{2,1}^{n/2}, \quad u_0 \in \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}, \quad j_0, j_1 \in \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}.$$

Rappelons que l'hypothèse de type « régularité basses fréquences » sur b_0 est déjà présente dans le cas non radiatif [5]. Elle est essentielle pour contrôler le terme de pression, qui n'est pas à la même échelle que les autres termes. De façon générale, dès l'analyse du linéarisé du système (9), il sera fondamental d'utiliser des régularités Besov différentes pour les basses et hautes fréquences. On adoptera alors la notation suivante :

$$f = \sum_{k \leq 0} \dot{\cdot}_k f \quad \text{et} \quad f^h = \sum_{k > 0} \dot{\cdot}_k f$$

ainsi que

$$\|f\|_{\dot{B}_{2,1}^s} := \sum_{k \leq 0} 2^{ks} \|\dot{\cdot}_k f\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h := \sum_{k > 0} 2^{ks} \|\dot{\cdot}_k f\|_{L^2}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cet exposé.

Théorème 1.1. *Sous la condition nécessaire et suffisante de stabilité linéaire*

$$n^2 C^2 > b'(1) \operatorname{Re}^2(2 + s/a) \quad \text{avec} \quad := + 2\mu,$$

il existe une constante $c > 0$ telle que si

$$(10) \quad \|(\mathcal{U}^0, j_0^0, j_1^0)\|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \|b^0\|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \|b^0\|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}}^h \leq c$$

alors le système (9) a une unique solution globale (a, u, j_0, j_1) vérifiant

$$\begin{aligned} b &\in C_b(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}+1}) \quad \text{et} \quad b^h \in C_b(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{n/2}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{n/2}) \\ j_0, j_1, u &\in C_b(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}+1}) \\ j_0^h, j_1^h &\in C_b(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}). \end{aligned}$$

De plus, les basses fréquences des fonctions j_0 et j_1 définies par²

$$j_0 := j_0 - b - \frac{1}{2} \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \operatorname{div} j_1 \quad \text{et} \quad j_1 := j_1 - \nabla a$$

sont dans $L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})$.

Nous concluons cette introduction par quelques remarques :

- (1) Les propriétés d'intégrabilité globale en temps pour les basses fréquences de j_0 et j_1 sont essentielles pour contrôler quadratiquement et indépendamment du temps, le terme $k_4(b)j_1$ dans la deuxième équation de (9).
- (2) La condition nécessaire et suffisante de stabilité linéaire est indépendante du nombre de Mach. Cela rend possible l'étude asymptotique à faible nombre de Mach (voir la dernière partie de cet exposé).

2. Les coefficients \dots et \dots sont donnés par (13).

- (3) Le théorème ci-dessus est le premier résultat d'existence globale de solutions fortes à régularité critique pour le système des fluides radiatifs en dimension $n \geq 2$. Nous avons néanmoins dû faire un certain nombre de simplifications, la plus sévère étant l'approximation P1. La résolution du vrai système, avec dépendance en ϵ est un problème ouvert nécessitant probablement de nouvelles techniques pour le traitement des quantités moyennées.

Le reste du texte s'articule ainsi. La partie suivante est dédiée à une analyse essentiellement optimale du linéarisé de (9). Elle comporte des pistes pour l'étude de systèmes linéaires nettement plus généraux, et pour lesquels une résolution explicite serait totalement exclue (voir par exemple notre travail en cours [10] sur le système polytropique). Dans la troisième partie, nous démontrons le théorème ci-dessus. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons quelques asymptotiques intéressantes dans les applications, et donnons quelques précisions sur l'asymptotique à faible nombre de Mach.

2. ÉTUDE DES ÉQUATIONS LINÉARISÉES

Soit $\underline{a} := P'(1)$, $\underline{a}' := B'(1)$ et $\underline{a} := n^{-1}(\underline{a} + \underline{s})$. Les équations linéarisées autour de $b = 0$, $u = 0$, $j_0 = 0$, $j_1 = 0$ s'écrivent

$$(11) \quad \begin{aligned} \epsilon b + \operatorname{div} u &= 0, \\ \epsilon u - \frac{1}{Re} \mu \operatorname{grad} u - \frac{1}{Re} (\underline{a} + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \frac{1}{Ma^2} \underline{a} \nabla b &= \mathcal{L} \underline{j}_1, \\ \epsilon j_0 + \frac{1}{n} C \operatorname{div} j_1 &= C \mathcal{L} \underline{a}' b - j_0, \\ \epsilon j_1 + C \nabla j_0 &= -n C \mathcal{L} \underline{j}_1. \end{aligned}$$

Soit \mathcal{P} le projecteur orthogonal L^2 sur les champs à divergence nulle. Le couplage entre les parties incompressibles de u et j_1 est facile à comprendre : $\mathcal{P}u$ et $\mathcal{P}j_1$ vérifient juste

$$\epsilon \mathcal{P}u - \frac{\mu}{Re} \mathcal{P}u = \mathcal{L} \underline{a} \mathcal{P}j_1 \quad \text{et} \quad \epsilon \mathcal{P}j_1 + n \underline{a} C \mathcal{L} \mathcal{P}j_1 = 0.$$

Pour comprendre le couplage entre les parties potentielles de u , j_1 , et les autres inconnues, on commence par se ramener à des inconnues scalaires en posant : $d := \epsilon^{-1} \operatorname{div} u$ et $j_1 := \epsilon^{-1} \operatorname{div} j_1$ (avec $\epsilon^{\pm 1} := (-\epsilon)^{\pm 1/2}$). Le système 4×4 vérifié par (b, d, j_0, j_1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon b + \operatorname{div} v &= 0, \\ \epsilon d - \frac{1}{Re} \operatorname{grad} d - \frac{1}{Ma^2} \underline{a} b &= \mathcal{L} \underline{j}_1, \\ \epsilon j_0 + \frac{1}{n} C \operatorname{div} j_1 + j_1 C \mathcal{L} \underline{a}' b &= C \mathcal{L} \underline{a}' b, \\ \epsilon j_1 - C \operatorname{div} j_0 + n C \mathcal{L} \underline{j}_1 &= 0. \end{aligned}$$

On peut ramener le nombre de paramètres à « seulement » 5, par changement d'échelle en définissant b , d , j_0 et j_1 par

$$b(t, x) = \epsilon b(\epsilon t, \epsilon x), \quad d(t, x) = \epsilon d(\epsilon t, \epsilon x), \quad j_0(t, x) = \epsilon j_0(\epsilon t, \epsilon x), \quad j_1(t, x) = \epsilon j_1(\epsilon t, \epsilon x)$$

avec $\epsilon, \mu, \nu, \gamma, \theta, \eta, \rho_0$ et ρ_1 convenablement choisis (voir [7]).

Dans la suite, on adopte ce changement d'échelle, mais on omet les tildes pour alléger les notations. En variables de Fourier ω , si l'on note $\tilde{X} := |X|$, le système obtenu s'écrit donc :

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b \\ d \\ j_0 \\ j_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & - \\ -0 & & \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \\ j_0 \\ j_1 \end{pmatrix} = 0$$

avec

$$(13) \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{C} \frac{Ma}{\sqrt{-}}, & &= a \mathcal{C} \mathcal{L} \frac{Ma^2}{Re -}, \\ &= 1 + \frac{s}{a -}, & &= \frac{1}{n^{1/4}} \frac{Ma^2}{Re -} \mathcal{L} \frac{5}{4} \mathcal{C} \frac{1}{a(a+s)}. \end{aligned}$$

Si l'on note A la matrice ci-dessus, alors la solution $X(t) := {}^T(a(t), d(t), j_0(t), j_1(t))$ est donnée par

$$X(t) = e^{-tA} X(0).$$

À ω fixé, toutes les solutions de (12) sont stables (i.e. tendent vers 0 pour $t \rightarrow +\infty$) si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement positive.

Afin d'éviter le calcul (en théorie possible) des valeurs propres de A , on va appliquer le théorème de Routh-Hurwitz. En notant $s = \omega^2$ et $\rho = \frac{Ma^2}{Re}$, on constate que le polynôme caractéristique de A s'écrit $P(s) = a_0 s^4 - a_1 s^3 + a_2 s^2 - a_3 s + a_4$, avec

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \omega^2 + s, \quad a_2 = (\omega^2 + s + 1)^2 + \rho, \quad a_3 = \omega^2 + s + (\omega^2 + s)\rho, \quad a_4 = \omega^2 + s + (\omega^2 + s)\rho^2.$$

D'après le théorème de Routh-Hurwitz, toutes les racines de P sont à partie réelle *strictement positive* si et seulement si les déterminants suivants sont strictement positifs :

$$A_1 := a_1, \quad A_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad A_3 := \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad A_4 := \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Un calcul un peu fastidieux (voir [7]) montre que ces conditions sont vérifiées pour tout $\omega > 0$ si et seulement si

$$(14) \quad \rho^2 > \omega^2 s.$$

Cette information ne donne malheureusement aucune uniformité par rapport à ω dans les estimations du semi-groupe. Nous allons donc devoir pousser davantage l'analyse de (12) vu comme un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, dépendant du paramètre ω . Notre analyse va dépendre de la taille de ω , et nous allons devoir considérer trois régimes distincts : basses fréquences (ω petit), moyennes fréquences (ω de l'ordre de l'unité) et hautes fréquences (ω grand).

2.1. Analyse basses fréquences. L'analyse pour ω petit est la plus délicate. Pour la mener, on récrit le système dans la base de diagonalisation correspondant à $\omega = 0$ ce qui revient à faire le changement d'inconnues :

$$(15) \quad U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & - \\ - & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \\ j_0 \\ j_1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul facile montre que $U = U(t, \cdot)$ vérifie

$$(E) \quad {}_tU + A_0U + (A_1 + B_1)U + {}^2A_2U = 0,$$

avec, en notant $\prime := + \frac{2}{}$,

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 - \frac{2}{} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \prime \\ 0 & 0 & - & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 := - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -- \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La difficulté de l'analyse réside dans le fait que ce système comporte des termes de trois ordres différents en ϵ et que les structures des différentes matrices ne semblent a priori, pas compatibles entre elles. En effet, A_0 est diagonale, mais dégénérée, A_2 a une valeur propre positive et trois valeurs propres nulles, mais n'est pas diagonale, ni symétrique, A_1 et B_1 sont respectivement antisymétrique et symétrique à multiplication près à gauche par une matrice diagonale positive (qui n'est pas la même pour A_1 et B_1). Une analyse un peu plus poussée laisse présager que le terme le « pire » est B_1U . En fait, s'il était absent, une adaptation de l'analyse de K. Beauchard et E. Zuazua [3] permettrait de traiter le système sans trop problème, pour ϵ petit.

Afin d'éliminer B_1U , nous allons faire un *deuxième* changement d'inconnue $V := (I + P)U$ avec P matrice convenablement choisie. Tout d'abord, un calcul facile donne

$${}_tV + A_0V + (A_1 + B_1 + [P, A_0])V + {}^2[A_0, P]P + [P, A_1] + [P, B_1] + A_2V + {}^3(I + P)(A_1 + B_1)P^2 - A_0P^3 - A_2P(I + P)^{-1}V = 0.$$

Donc, si l'on peut trouver P telle que

$$(16) \quad [A_0, P] = B_1,$$

alors on obtient, en posant $A_3 := (PA_0 - A_1)P^2 + A_2P$,

$$(17) \quad {}_tV + A_0V + A_1V + {}^2(A_2 + PB_1 + [P, A_1])V = {}^3(I + P)A_3(I + P)^{-1}V.$$

Vu que A_1 est antisymétrisable par une matrice diagonale positive, on voit que le premier terme potentiellement dangereux est en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ et non plus en $\mathcal{O}(\epsilon)$.

Pour calculer P , il est commode de récrire les matrices intervenant dans (16) par blocs :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & B_1^1 \\ B_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} \\ P^{21} & P^{22} \end{pmatrix}.$$

Avec cette écriture, on a

$$(18) \quad [A_0, P] = \begin{pmatrix} 0 & -P^{12}D \\ DP^{21} & [D, P^{22}] \end{pmatrix}.$$

Pour assurer (16), on peut donc définir P par

$$P^{11} := 0, \quad P^{22} := 0, \quad P^{12} := -B_1^1D^{-1}, \quad P^{21} := D^{-1}B_1^2,$$

c'est-à-dire,

$$(19) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

En conclusion, pour l'analyse basses fréquences, il semble judicieux de faire le changement de variables suivant :

$$(20) \quad V = \begin{pmatrix} b \\ d \\ j_0 \\ j_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & b \\ -\frac{1}{2} & 1 & - & - & d \\ - & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & j_0 \\ - & 0 & 0 & 1 & j_1 \end{pmatrix} .$$

Vu la structure de la matrice de changement de base, il est clair qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ ne dépendant que de ν, μ et σ tel que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$ on ait $|U(\epsilon)| \approx |V(\epsilon)|$. Dans la suite, nous allons donc nous concentrer sur la majoration de $V(\epsilon)$.

Pour cela, commençons par déterminer le terme en ϵ^2 . On a :

$$PB_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\epsilon^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$[P, A_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\epsilon(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon' + \frac{\epsilon}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{2}) \\ -\epsilon' + \frac{\epsilon}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Donc les inconnues de type « hydrodynamique » (b, d) vérifient, à un terme en $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ près,

$$(21) \quad \begin{aligned} \epsilon b + d - \frac{\epsilon^2}{2} b &= \epsilon^2 j_0, \\ \epsilon d - \epsilon(1 + \frac{\epsilon^2}{2}) b + \frac{\epsilon^2}{2} (1 - \frac{\epsilon^2}{2}) d &= \epsilon^2 j_1, \end{aligned}$$

alors que les inconnues « radiatives » satisfont :

$$\begin{aligned} \epsilon j_0 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} j_0 + \epsilon' j_0 &= \epsilon^2 b, \\ \epsilon j_1 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} j_1 - \epsilon j_1 &= \epsilon^2 d, \end{aligned}$$

avec $\epsilon_0, \epsilon_1, b$ et d ne dépendant que de ν, μ et σ .

En introduisant les fonctions de Lyapunov

$$\mathcal{L}^2 = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} (|b|^2 + |d|^2) - 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \operatorname{Re}(bd) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^2 = |j_0|^2 + -|j_1|^2,$$

on obtient aisément, pour ϵ assez petit et sous la condition de stabilité

$$1 > \frac{\epsilon^2}{2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} ,$$

équivalente à (14), les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{L}^2 + \mathcal{L}^2 \leq C \mathcal{L} \mathcal{J} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{J}^2 + \min(\nu, \eta) \mathcal{J}^2 \leq C \mathcal{L} \mathcal{J}.$$

ainsi que $\mathcal{L} \approx |(b, d)|$ et $\mathcal{J} \approx |(j_0, j_1)|$.

On peut donc conclure que

$$(22) \quad |(b, d, j_0, j_1)(t)| + \int_0^t |(b, d)| d + \int_0^t |(j_0, j_1)| d \leq C |(b, d, j_0, j_1)(0)|$$

pour tout $0 \leq t \leq t_0$ avec $t_0 > 0$ assez petit et $C > 0$ assez grand ne dépendant que de ν, η et γ .

2.2. Analyse hautes fréquences. On peut voir (12) comme un couplage d'ordre inférieur entre, d'une part, le linéarisé des équations de Navier-Stokes compressibles et, d'autre part, un système hyperbolique symétrique, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} t b + d &= 0, \\ t d - b + \eta d &= j_1, \\ t j_0 + j_0 + \nu j_1 &= b, \\ t j_1 + j_1 - \nu j_0 &= 0. \end{aligned}$$

En introduisant, comme dans [5], la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L}^2 := |b|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{b}d) + 2(|b|^2 + |d|^2),$$

des calculs très simples montrent que

$$|(b, b, d)(t)| + \min(1, \nu) \int_0^t |b| d + \int_0^t |d| d \leq C |(b, b, d)(0)| + \int_0^t |j_1| d.$$

Pour le système vérifié par les inconnues radiatives, on a simplement :

$$|(j_0, j_1)(t)| + \min(\nu, \eta) \int_0^t |(j_0, j_1)| d \leq |(j_0, j_1)(0)| + \int_0^t |b| d.$$

À l'aide des deux inégalités précédentes, on conclut qu'il existe t_1 et C ne dépendant que de ν, η et γ , et telles que pour tout $t \geq t_1$,

$$(23) \quad |(b, b, d, j_0, j_1)(t)| + \min(1, \nu) \int_0^t |b| d + \int_0^t |d| d + \int_0^t |(j_0, j_1)| d \leq C |(b, b, d, j_0, j_1)(0)|.$$

2.3. Analyse moyennes fréquences. Pour des coefficients généraux vérifiant (14), il n'y a pas de raison pour que les régimes basses et hautes fréquences déterminés précédemment se recourent. Il faut donc également faire une analyse moyenne fréquences. Pour ce faire, intuitiver un changement de variable ou une fonctionnelle de Lyapunov adéquate paraît délicat. On peut s'en passer en combinant la condition nécessaire et suffisante de stabilité pour tout $\nu > 0$ (obtenue en (14)) et un simple argument de compacité. En effet, si (14) est vérifiée alors $e^{-tA} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, et donc

$$T := \sup\{t \in \mathbb{R}^+ : |e^{-tA}| \geq e^{-1}\} < +\infty.$$

Comme $\rho \mapsto A$ est continue, cela entraîne que la fonction $\rho \mapsto T$ est semi-continue supérieurement, et donc

$$T^* := \sup_{\rho \in [0, 1]} T \text{ est fini.}$$

On en déduit alors immédiatement l'existence de deux constantes c et C strictement positives telles que

$$\forall \rho \in [0, 1], \forall t \in \mathbb{R}^+, |e^{-tA}| \leq Ce^{-ct},$$

ce qui implique

$$(24) \quad |(b, d, j_0, j_1)(t)| + \int_0^t |(b, d, j_0, j_1)| d \leq C|(b, d, j_0, j_1)(0)| \text{ pour tout } 0 \leq t \leq 1.$$

3. DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT D'EXISTENCE GLOBALE

Nous expliquons juste comment obtenir des estimations a priori globales pour les normes intervenant dans l'énoncé du théorème 1.1. En approchant le système par troncature spectrale (méthode de Friedrichs), il est facile de construire un schéma menant à l'existence de solutions globales vérifiant les propriétés requises. Quant à la démonstration de l'unicité, c'est essentiellement la même que pour le système non radiatif, vu que les termes supplémentaires sont d'ordre inférieur, et que les équations vérifiées par (j_0, j_1) sont linéaires.

On suppose donc donnée une solution (b, u, j_0, j_1) globale suffisamment régulière et décroissante à l'infini. En tronquant (11) spectralement à l'aide des opérateurs χ_k , et en combinant les inégalités (22), (23), (24) avec le théorème de Fourier-Plancherel, on obtient facilement des estimations a priori dans l'espace qui nous intéresse pour les solutions de (11). Par la formule de Duhamel, on peut autoriser des termes sources B et U dans les deux premières équations de (11)³. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \|(b, u, j_0, j_1)(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^s} + \int_0^t \|(b, u)\|_{\dot{B}_{2,1}^{s+2}} d + \int_0^t \|(j_0, j_1)\|_{\dot{B}_{2,1}^s} \\ \|(b, u, j_0, j_1)(0)\|_{\dot{B}_{2,1}^s} + \int_0^t \|(B, U)\|_{\dot{B}_{2,1}^s} d, \end{aligned}$$

avec j_0 et j_1 définis comme dans l'énoncé du théorème 1.1, et

$$\begin{aligned} \|(u, \nabla b, j_0, j_1)(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h + \int_0^t \|u\|_{\dot{B}_{2,1}^{s+2}}^h + \|(j_0, j_1)\|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h + \|\nabla b\|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h d \\ \|(u, \nabla b, j_0, j_1)(0)\|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h + \int_0^t \|(\nabla B, U)\|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h d. \end{aligned}$$

Cependant, exactement comme dans le cas non radiatif, l'approche naïve consistant à mettre tous les termes non linéaires dans B et U est vouée à l'échec car $u \cdot \nabla b$ fait perdre une dérivée. Au niveau L^2 , la parade est bien connue : intégration par parties. Dans le contexte fonctionnel que nous considérons, cette intégration par parties doit être faite après localisation spectrale du système, et il est plus efficace de *paralinéariser* le système (9). En reprenant le

3. Dans les autres aussi, mais c'est inutile puisque l'on a en vue la résolution de (9).

changement d'échelle de la section précédente, cela revient à considérer :

$$(25) \quad \begin{aligned} {}_t b + T_V \cdot \nabla b + \operatorname{div} u &= B, \\ {}_t u + T_V \cdot \nabla u - \mathcal{A}u + \nabla b - j_1 &= U, \\ {}_t j_0 + \operatorname{div} j_1 + j_0 - b &= 0, \\ {}_t j_1 + \nabla j_0 + j_1 &= 0. \end{aligned}$$

où v est un champ de vitesses donné (voué à être égal à u in fine).

En basses fréquences, les termes de para-convection sont inoffensifs, et sont juste considérés comme des sources. On a donc :

$$(26) \quad \begin{aligned} \| (b, u, j_0, j_1)(t) \|_{\dot{B}_{2,1}^s} + \int_0^t \| (b, u) \|_{\dot{B}_{2,1}^{s+2}} d\tau + \int_0^t \| (j_0, j_1) \|_{\dot{B}_{2,1}^s} d\tau \\ \| (b, u, j_0, j_1)(0) \|_{\dot{B}_{2,1}^s} + \int_0^t \| (B - T_V \cdot \nabla b, U - T_V \cdot \nabla u) \|_{\dot{B}_{2,1}^s} d\tau. \end{aligned}$$

En hautes fréquences, on introduit pour tout $k \geq k_1$ (avec $2^{k_1} \approx 1$) la fonctionnelle de Lyapunov :

$$L_k^2 := 2 \| (b_k, u_k) \|_{L^2}^2 + \| \nabla a_k \|_{L^2}^2 + 2(\nabla a_k | u_k) + \| (j_{0,k}, j_{1,k}) \|_{L^2}^2$$

avec $b_k := \dot{\cdot}_k b$, $u_k := \dot{\cdot}_k u$, etc, et l'on trouve en appliquant $\dot{\cdot}_k$ à (25) puis par méthode d'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} L_k^2 + \| (\nabla b_k, \mathcal{Q}u_k) \|_{L^2}^2 + 2\mu^{-1} \| \nabla \mathcal{P}u_k \|_{L^2}^2 + \| (j_{0,k}, j_{1,k}) \|_{L^2}^2 &= 2(u_k | j_{1,k}) \\ + (\nabla b_k | j_{1,k}) + (b_k | j_{0,k}) + 2(B_k | b_k) + 2(U_k | u_k) + (\nabla B_k | \nabla b_k) + (\nabla B_k | u_k) \\ + (U_k | \nabla b_k) + 2 \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla b) | b_k + 2 \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla u) | u_k \\ + \nabla \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla b) | \nabla b_k + \nabla \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla b) | u_k + \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla u) | \nabla b_k. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.1 de [7], il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla b) | b_k &\leq \| \nabla v \|_{L^\infty} \| b_k \|_{L^2} \| b_{k'} \|_{L^2} \\ &\quad |k' - k| \leq N \\ \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla u) | u_k &\leq \| \nabla v \|_{L^\infty} \| u_k \|_{L^2} \| u_{k'} \|_{L^2} \\ &\quad |k' - k| \leq N \\ \nabla \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla b) | \nabla b_k &\leq \| \nabla v \|_{L^\infty} \| \nabla b_k \|_{L^2} \| \nabla b_{k'} \|_{L^2} \\ &\quad |k' - k| \leq N \\ \nabla \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla b) | u_k + \dot{\cdot}_k (T_V \cdot \nabla u) | \nabla b_k &\leq \| \nabla v \|_{L^\infty} \| (\nabla b_k, u_k) \|_{L^2} \| (\nabla b_{k'}, u_{k'}) \|_{L^2} \\ &\quad |k' - k| \leq N \end{aligned}$$

On en conclut que l'estimation suivante pour les hautes fréquences de (25) est vérifiée :

$$(27) \quad \begin{aligned} \| (\nabla b, u, j_0, j_1)(t) \|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h + \int_0^t \| u \|_{\dot{B}_{2,1}^{s+2}}^h + \| (j_0, j_1) \|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h + \| \nabla b \|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h d\tau \\ \| (\nabla b, u, j_0, j_1)(0) \|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h + \int_0^t \| (\nabla B, U) \|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h d\tau + \int_0^t \| \nabla v \|_{L^\infty} \| (\nabla b, u, j_0, j_1) \|_{\dot{B}_{2,1}^s}^h d\tau. \end{aligned}$$

Il est maintenant assez facile de démontrer des estimations globales en temps pour les solutions de (9) issues de données initiales vérifiant (10). Il s'agit de borner la quantité suivante :

$$\begin{aligned} X(t) := & \| (u, j_0, j_1)(t) \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \| b(t) \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \| b(t) \|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}}^h + \int_0^t \| u \|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}+1}} + \| (b, j_0, j_1) \|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}+1}} \\ & + \| j_0 - b - \frac{1}{2} \operatorname{div}(u - \nabla j_1) \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \| j_1 - \nabla b \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \| (j_0, j_1) \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}}^h + \| b \|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}}^h \, d . \end{aligned}$$

Pour cela, on applique (26) et (27) avec $s = n/2 - 1$, $v = u$ et

$$\begin{aligned} B &:= -T'_{\nabla b} \cdot u - k_1(b) \operatorname{div} u, \\ U &:= -T'_{\nabla u} \cdot u - k_2(b) Au - k_3(b) \nabla b + k_4(b) j_1. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} X(t) \leq & C \, X(0) + \int_0^t \| \nabla u \|_{L^\infty} X \, d \\ & + \int_0^t \| B \|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}}^h + \| U \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}}^h + \| B - T_u \cdot \nabla b \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \| U - T_u \cdot \nabla u \|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} \, d . \end{aligned}$$

Les lois de produit classiques dans les espaces de Besov donnent des estimations quadratiques (du moins si $\|b\|_{L^\infty}$ est petit) pour tous les termes source ci-dessus, sauf $k_4(b)j_1$. Pour ce dernier terme, le contrôle global L^1 en temps basses fréquences est crucial : on écrit

$$k_4(b)j_1 = k_4(b)j_1^h + k_4(b) \, j_1 - \nabla b + k_4(b)(\nabla b) .$$

Donc en combinant loi de composition dans $\dot{B}_{2,1}^{n/2}$, et le fait que le produit est continu de $\dot{B}_{2,1}^{n/2} \times \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}$ dans $\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}$, on obtient pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \| k_4(b)j_1 \|_{L^1(0,t;\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} & \leq \| b \|_{L^\infty(0,t;\dot{B}_{2,1}^{n/2})} \| j_1^h \|_{L^1(0,t;\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} + \| j_1 - \nabla b \|_{L^1(0,t;\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} \\ & \quad + \| b \|_{L^2(0,t;\dot{B}_{2,1}^{n/2})} \| (\nabla b) \|_{L^2(0,t;\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} . \end{aligned}$$

Mais

$$\| j_1^h \|_{L^1(0,t;\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} \quad \| j_1 \|_{L^1(0,t;\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}+1})} \quad \text{et} \quad \| (\nabla b) \|_{L^2(0,t;\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} \quad \| b \|_{L^2(0,t;\dot{B}_{2,1}^{n/2})}$$

et, en décomposant b en basses et hautes fréquences,

$$\| b \|_{L^2(0,t;\dot{B}_{2,1}^{n/2})} \quad \| b \|_{L^1(0,t;\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}+1}) \cap L^\infty(0,t;\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} + \| b \|_{L^1(0,t;\dot{B}_{2,1}^{n/2}) \cap L^\infty(0,t;\dot{B}_{2,1}^{n/2})} .$$

On en conclut donc que

$$X(t) \leq C(X(0) + X^2(t)),$$

ce qui entraîne $X(t) \leq 2CX(0)$ pour tout temps si $X(0)$ (i.e. le membre de gauche de (10)) est assez petit.

4. ÉTUDES ASYMPTOTIQUES

Dans cette dernière section, on présente brièvement quelques asymptotiques pertinentes dans certaines modélisations physiques. Tout d'abord, par analogie avec la situation non radiative, on peut se demander si, dans l'asymptotique *faible nombre de Mach*, la vitesse tend à satisfaire le système de Navier-Stokes incompressible. Pour fixer les idées, supposons que

$$(28) \quad Ma = \varepsilon, \quad Sr = Re = 1, \quad \mathcal{C} = \varepsilon^{-1}, \quad \mathcal{L} = 1 \text{ et } \mathcal{L}_s = 1,$$

D'un point de vue de la modélisation physique, vu que $\mathcal{C}Ma = c/\sqrt{\rho}$, on s'attend à ce que \mathcal{C} soit grand. Pour simplifier, nous supposons simplement $\mathcal{C} = \varepsilon^{-1}$ (sachant qu'avoir \mathcal{C} grand améliore encore la convergence, voir [8]). On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Supposons que (28) soit vérifiée et que la densité initiale soit donnée par $\rho_0 = 1 + b_0$. Il existe ε_0 et $c > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, si⁴*

$$I_0' := \|u_0, j_{0,0}, j_{1,0}\|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \|b_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}} + \|b_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}}^{h, \frac{1}{2}} \leq c$$

alors le système (9) admet une unique solution globale (b, u, j_0, j_1) dans l'espace du théorème 1.1, uniformément bornée en ε si l'on met le seuil entre les basses et les hautes fréquences à $1/\varepsilon$. De plus a

$$\|j_0\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1}) + L^2(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{2,1}^{n/2})} + \|j_1\|_{(L^1 + L^2)(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{2,1}^{(n/2)-1})} \leq C I_0'.$$

Enfin, si $\mathcal{P}u_0 \rightarrow v_0$ dans \mathcal{S}' alors u converge dans \mathcal{S}' vers la solution v du système de Navier-Stokes incompressible avec donnée initiale v_0 .

Dans le cas d'un fluide évoluant dans l'espace entier \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$, on dispose de plus de résultats de convergence forte.

La démonstration comporte deux parties bien distinctes. La première partie consiste à démontrer des estimations indépendantes de ε pour la quantité apparaissant dans le théorème ci-dessus. Il s'agit de reprendre l'analyse proposée dans les deux sections précédentes, mais en suivant soigneusement la dépendance en ε . Pour ce faire, par analogie avec la situation non radiative, il est commode de faire le changement d'échelle :

$$(29) \quad \begin{aligned} b(t, x) &:= \varepsilon b(\varepsilon^2 t, \varepsilon x), & u(t, x) &:= \varepsilon u(\varepsilon^2 t, \varepsilon x), \\ j_0(t, x) &:= \varepsilon_0 j_0(\varepsilon^2 t, \varepsilon x), & j_1(t, x) &:= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n}} j_1(\varepsilon^2 t, \varepsilon x), \end{aligned}$$

$$\text{avec } \varepsilon_0 := (\rho'(1))^{-1/2} \text{ et } \varepsilon := \frac{1}{\sqrt{\rho'(1)}} \frac{\rho'(1)}{n} \frac{1}{a} \frac{1}{a+s}.$$

Le système vérifié par (b, u, j_0, j_1) est

$$(30) \quad \begin{aligned} \varepsilon_t b + u \cdot \nabla b + (1 + k_1(b)) \operatorname{div} u &= 0, \\ \varepsilon_t u + u \cdot \nabla u - \mathcal{A}u + \nabla b - \varepsilon^2 j_1 &= k_2(b) \mathcal{A}u + k_3(b) \nabla b + \varepsilon^2 k_4(b) j_1, \\ \varepsilon_t j_0 + \operatorname{div} j_1 + j_0 - \varepsilon^2 b &= 0, \\ \varepsilon_t j_1 + \nabla j_0 + j_1 &= 0, \end{aligned}$$

4. En notant $Z_{\dot{B}_{2,1}^s} := \sum_{2^k \leq s} 2^{ks} \dot{\Delta}_k Z_{L^2}$ et $Z_{\dot{B}_{2,1}^s}^h := \sum_{2^k > s} 2^{ks} \dot{\Delta}_k Z_{L^2}$.

avec $\mathcal{L} := \mathcal{L} + 2\mu$, $\mathcal{A} := \mathcal{A}'$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \frac{1}{n\rho'(1)}, & \mathcal{A} &:= \frac{a}{\rho'(1)}, \\ \mathcal{L}_s &:= \frac{a+s}{\rho'(1)}, & \mathcal{A}_s &:= \frac{\sqrt{(a+s)B'(1)}}{n^{1/4}(\rho'(1))^{5/4}}. \end{aligned}$$

La condition de stabilité linéaire devient

$$\mathcal{L}^2 > \mathcal{A}^2(\mathcal{L} + \mathcal{A}).$$

Elle est donc vérifiée pour \mathcal{L} petit. Il s'agit ensuite simplement de reprendre pas à pas les calculs des deux sections précédentes pour obtenir les estimations uniformes voulues.

La deuxième partie de la démonstration repose sur des méthodes de compacité à partir des estimations uniformes. Elle est assez immédiate. Enfin, dans le cas \mathbb{R}^n , on peut, comme dans [6] obtenir des résultats de convergence forte en combinant avec les estimations de Strichartz.

D'autres asymptotiques intéressantes, appelées *limites de diffusion*, correspondent au cas où les coefficients d'absorption-émission a , et de diffusion s sont d'ordre de grandeur très différents (i.e. \mathcal{L}_s très petit ou très grand). En supposant que $Re = Sr = Ma = 1$ et que $\mathcal{C} = -1$, le système à considérer devient alors

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}(u) &= 0, \\ \partial_t(u) + \operatorname{div}(u \otimes u) - \mu u - (\mathcal{L} + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \nabla p &= \frac{\mathcal{L}}{n}(a + \mathcal{L}_s s)l_1, \\ \partial_t j_0 + \frac{1}{n} \operatorname{div} j_1 &= \mathcal{L}_s a(B - l_0), \\ \partial_t j_1 + \nabla j_0 &= -\mathcal{L}(a + \mathcal{L}_s s)l_1. \end{aligned} \tag{31}$$

En vertu de la condition de stabilité linéaire (14), les asymptotiques pertinentes doivent vérifier

$$n \mathcal{L} > \frac{2 + \mathcal{L}_s}{1 + \mathcal{L}_s}. \tag{32}$$

Se dégagent alors essentiellement trois types d'asymptotique :

- La limite de diffusion à l'équilibre : $\mathcal{L} = -1$ et $\mathcal{L}_s = -2$ où le système limite est formellement $l_0 = B(\cdot)$, $l_1 = 0$ et (\cdot, u) solution du système de Navier-Stokes légèrement modifié suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}(u) &= 0, \\ \partial_t(u) + \operatorname{div}(u \otimes u) - \mu u - (\mathcal{L} + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \nabla p + \frac{B}{n} &= 0. \end{aligned}$$

- La limite de diffusion hors équilibre : $\mathcal{L} = -1$ et $\mathcal{L}_s = -2$ (avec $\mathcal{L}_s > 1/n$ en vertu de (32)) où l'on trouve $l_1 = 0$ et (\cdot, u, l_0) solution d'un système de Navier-Stokes couplé avec une équation parabolique pour l_0 :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}(u) &= 0, \\ \partial_t(u) + \operatorname{div}(u \otimes u) - \mu u - (\mathcal{L} + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \nabla p + \frac{l_0}{n} &= 0, \\ \partial_t l_0 - \frac{1}{n_s} l_0 + a(l_0 - B) &= 0. \end{aligned}$$

- Une limite de diffusion intermédiaire : $\mathcal{L}^2 \mathcal{L}_S = 1$ avec $\mathcal{L} \ll 1$ où l'on obtient le système de Navier-Stokes-Poisson compressible suivant :

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \\ \rho(u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u + \nabla \rho + \frac{I_0}{n} \rho &= 0, \\ -\frac{1}{n} \rho_s I_0 + \rho_a (I_0 - B) &= 0. \end{aligned}$$

Certaines de ces asymptotiques ont été dérivées formellement dans [2], et démontrées dans le cadre des solutions faibles par B. Ducomet et S. Nečasova dans [16, 18]. Leur justification dans le cadre des solutions fortes est en cours dans [9].

RÉFÉRENCES

- [1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin : *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer (2011).
- [2] C. Buet et B. Després : Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics, *J. Quant. Spectroscopy Rad. Transf.*, 85, pages 385–480 (2004).
- [3] K. Beauchard et E. Zuazua : Large time asymptotics for partially dissipative hyperbolic systems, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199(1), pages 177–227 (2011).
- [4] S. Chandrasekhar : *Radiative transfer*. Dover Publications, Inc., New York, 1960.
- [5] R. Danchin : Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Invent. Math.*, 141, pages 579–614 (2000).
- [6] R. Danchin : Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 35(1), pages 27–75 (2002).
- [7] R. Danchin et B. Ducomet : On a simplified model for radiating flows, *Journal of Evolution Equations*, 14, pages 155–195 (2014).
- [8] R. Danchin et B. Ducomet : The low Mach number limit for a barotropic model of radiative flow, soumis.
- [9] R. Danchin et B. Ducomet : Diffusive limits for a barotropic model of radiative flow, en cours.
- [10] R. Danchin et B. Ducomet : Existence of strong solutions with critical regularity to a polytropic model for radiating flows, en cours.
- [11] B. Dubroca et J.-L. Feugeas : Étude théorique et numérique d'une hiérarchie de modèles aux moments pour le transfert radiatif, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 329, pages 915–920 (1999).
- [12] B. Ducomet, E. Feireisl et Š. Nečasová : On a model of radiation hydrodynamics, *Ann. I. H. Poincaré, Analyse non linéaire*, 28, pages 797–812 (2011).
- [13] B. Ducomet et Š. Nečasová : Large-time behavior of the motion of a viscous heat-conducting one-dimensional gas coupled to radiation, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 191, pages 219–260 (2012).
- [14] B. Ducomet et Š. Nečasová : Asymptotic behavior of the motion of a viscous heat-conducting one-dimensional gas with radiation : the pure scattering case, *Analysis and Applications*, 11, pages 1–29 (2013).
- [15] B. Ducomet et Š. Nečasová : Low Mach number limit for a model of radiation hydrodynamics, *Journal of Evolution Equations*, 14, pages 357–385 (2014).
- [16] B. Ducomet et Š. Nečasová, Diffusion limits for a model of radiation hydrodynamics, *Annali dell'Università di Ferrara*, à paraître.
- [17] B. Ducomet et Š. Nečasová, Global smooth solution of the Cauchy problem for a model of radiative flow, *Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 14, pages 1–36 (2015).
- [18] B. Ducomet et Š. Nečasová : Non equilibrium diffusion limit in a barotropic radiative flow, *Contemporary Mathematics*, à paraître.
- [19] E. Feireisl et A. Novotný : *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*. Birkhäuser, Basel, 2009.
- [20] C.D. Levermore : Entropy-based moment closures for kinetic equations, *Transp. Theory Stat. Phys.*, 26, pages 591–606 (1997).

- [21] C. Lin : *Mathematical analysis of radiative transfer models*, PhD Thesis, 2007.
- [22] C. Lin, J.-F. Coulombel et T. Goudon : Shock profiles for non-equilibrium radiative gases, *Physica D*, 218, pages 83–94 (2006).
- [23] R. B. Lowrie, J. E. Morel et J. A. Hittinger : The coupling of radiation and hydrodynamics, *The Astrophysical Journal*, 521, pages 432–450 (1999).
- [24] B. Mihalas et B. Weibel-Mihalas : *Foundations of radiation hydrodynamics*. Dover Publications, Dover, 1984.
- [25] T. Padmanabhan : *Theoretical astrophysics, Vol II : Stars and stellar systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [26] G. C. Pomraning : *Radiation hydrodynamics*. Dover Publications, New York, 2005.
- [27] I. Teleaga, M. Seaid, I. Gasser, A. Klar, J. Struckmeier : Radiation models for thermal flows at low Mach number, *J. of Comput. Phys.*, 215, pages 506–525 (2006).