



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2011-2012


Daniel Han-Kwan

Anisotropie dans un plasma fortement magnétisé

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2011-2012), Exposé n° XXV, 14 p.

<http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2011-2012____A25_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz,
École polytechnique, 2011-2012.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

ANISOTROPIE DANS UN PLASMA FORTEMENT MAGNÉTISÉ

DANIEL HAN-KWAN

RÉSUMÉ. Nous présentons les résultats prouvés dans [20, 22], qui concernent l'étude asymptotique de l'équation de Vlasov-Poisson dans un régime quasineutre et de champ magnétique intense. Nous insisterons en particulier sur les conséquences de l'anisotropie du problème physique sur l'analyse mathématique.

1. INTRODUCTION

On considère un plasma (i.e. un gaz ionisé), décrit de manière statistique par une équation de Vlasov-Poisson. On se place dans le cadre de l'approximation électrostatique, ce qui signifie que d'une part, le champ électrique E auto-induit dans le plasma dérive d'un potentiel électrique V , vérifiant une équation de Poisson. D'autre part, le champ magnétique B est un champ extérieur stationnaire. Etant donnée une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 , on considère que l'on a :

$$B = \bar{B}e_3,$$

avec \bar{B} une constante positive. Par la suite, l'indice \perp désignera la projection sur (e_1, e_2) et l'indice \parallel la projection sur e_3 . En principe, il faudrait considérer une équation de Vlasov pour chaque espèce de particules chargées, afin de décrire leur dynamique sous l'effet des forces électromagnétiques dans le plasma. Cependant, en remarquant que la masse d'un ion est très grande devant celle d'un électron, on s'aperçoit que les dynamiques typiques se font à des échelles de temps très différentes, si bien que l'on peut se ramener à l'étude d'une seule équation de transport. Sous forme adimensionnée, l'équation de Vlasov s'écrit de la manière suivante :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (-\nabla_x V + v \wedge B) \cdot \nabla_v f = 0, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), \quad \int f_0 dx dv = 1, \end{cases}$$

où $f(t, x, v)$ désigne la fonction de distribution de l'espèce décrite. Les données sont ici normalisées de sorte que $f(t, x, v) dx dv$ peut être interprété comme la probabilité de trouver au temps t une particule à la position x et à la vitesse v .

Si on se place à l'échelle de temps caractéristique des électrons (la fonction de distribution f décrivant alors la répartition des électrons), on peut supposer que les ions lourds restent immobiles à l'équilibre 1. Dans ce cadre, le potentiel électrique V vérifie l'équation de Poisson suivante :

$$(1.2) \quad -\Delta_x V = \int f dv - 1.$$

On obtient ainsi l'équation de Vlasov-Poisson pour les électrons. Si au contraire on se place à l'échelle de temps caractéristiques des ions (f décrit alors leur répartition), on peut considérer

que les électrons presque sans masse atteignent instantanément leur équilibre thermodynamique, si bien qu'ils suivent une loi de type Maxwell-Boltzmann. Concrètement, l'équation de Poisson s'écrit alors :

$$(1.3) \quad -\Delta_x V = \int f dv - e^V.$$

On obtient l'équation de Vlasov-Poisson pour les ions. Dans cette note, on se contentera de la version linéarisée suivante (communément utilisée en physique des plasmas) :

$$(1.4) \quad V - \Delta_x V = \int f dv - 1.$$

Par ailleurs, nous introduisons la longueur de Debye du plasma :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{N e^2}},$$

où ε_0 désigne la permittivité du vide, k_B est la constante de Boltzmann, e est une charge élémentaire, T est la température typique du plasma et N la densité typique. Physiquement, il s'agit de la longueur caractéristique d'oscillation du champ électrique auto-induit. Dans les situations "usuelles", on constate expérimentalement que λ_D est de l'ordre de $10^{-5} - 10^{-10} m$, ce qui est toujours très petit devant la longueur d'observation L . En posant $\varepsilon := \frac{\lambda_D}{L}$, et en notant n_i (resp. n_e) la densité des ions (resp. des électrons), l'équation de Poisson s'écrit schématiquement sous la forme :

$$\pm \varepsilon^2 \Delta_x V = n_i - n_e,$$

et il s'agit du seul endroit où ε intervient dans les équations. Dans le régime $\varepsilon \ll 1$, on s'attend ainsi à ce que $n_i \sim n_e$: le plasma est donc "quasiment" neutre (la neutralité correspondrait à $n_i = n_e$). La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ porte ainsi naturellement le nom de limite quasineutre.

Nous nous intéressons ici à la dynamique typique du plasma dans un régime combinant deux effets : quasineutralité et champ magnétique intense (ce qui signifie que $\overline{B} \gg 1$).

1.1. Champ magnétique intense et dérive électrique. Avant de se lancer dans l'analyse mathématique, il est instructif de commencer par une analyse heuristique sommaire du problème physique. Il s'agit de se faire une idée du mouvement typique d'une particule chargée soumis à un champ B intense. A cet effet, notons $\overline{B} = \frac{1}{\varepsilon}$ avec $\varepsilon \ll 1$ un petit paramètre positif, et écrivons les équations de Newton qui décrivent le mouvement typique d'une particule dans un champ (E, B) :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = V, \\ \frac{dV}{dt} = E + \frac{1}{\varepsilon} V \wedge e_3. \end{cases}$$

A l'aide de calculs élémentaires, il est possible d'établir un développement en puissances de ε du mouvement (en projetant selon la direction du champ magnétique et dans le plan perpendiculaire) :

$$(1.5) \quad \begin{cases} X_{\parallel}(t) = X_{\parallel}(0) + tV_{\parallel}(0) + \frac{t^2}{2}E_{\parallel} + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ X_{\perp}(t) = X_{\perp}(0) + r_L e^{i\Omega_c t} + t\varepsilon E \wedge e_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases}$$

en notant $\Omega_c \sim \frac{1}{\varepsilon}$ la fréquence cyclotron et $r_L \sim \varepsilon$ le rayon de Larmor. On voit ainsi qu'à l'ordre dominant, le mouvement est très contraint car la particule suit les lignes de champ de B , ce

qui est à la base du confinement de plasmas par confinement magnétique (et ce qui justifie par ailleurs pourquoi ce régime est intéressant à étudier). A l'ordre suivant en ε , on observe d'une part un mouvement typique hélicoïdal, la fréquence et le rayon de rotation typiques étant donnés par la fréquence cyclotron et le rayon de Larmor ; d'autre part, la particule subit une dérive, appelée *dérive électrique*, donnée par $E^\perp := E \wedge e_3$.

1.2. L'approximation "Rayon de Larmor Fini". Il se trouve que la dérive électrique joue un rôle extrêmement important dans la dynamique des plasmas confinés par champ magnétique intense. Une description précise de son effet apparaît nécessaire si l'on souhaite décrire finement les effets "turbulents" apparaissant dans ces plasmas. Or, nous avons vu dans le développement asymptotique du paragraphe précédent que cette dérive n'apparaissait pas à l'ordre dominant, ce qui signifie qu'il faut se placer à la bonne échelle pour pouvoir l'observer. Une première possibilité, proposée par F. Golse et L. Saint-Raymond dans [13], est de se restreindre au plan perpendiculaire et de se placer sur un temps d'observation long. Une autre possibilité, qui sera considérée ici, est de considérer ce que les physiciens appellent le scaling "rayon de Larmor fini". Ce scaling a été introduit dans la littérature mathématique par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [10]. Sans rentrer dans les détails, le principe de base est de considérer une longueur d'observation perpendiculaire L_\perp et une longueur parallèle L_\parallel et de se dire que l'on va "zoomer" dans le plan perpendiculaire afin de rendre les effets de la dérive électrique d'ordre dominant. Plus précisément, on prend :

$$\frac{L_\perp}{r_L} \sim 1, \quad \frac{L_\parallel}{r_L} \sim \frac{1}{\varepsilon}.$$

Avec un tel choix, le rayon de Larmor est donc d'ordre 1 (ce qui justifie le nom du scaling). En prenant en compte la quasineutralité du système, E. Frénod et E. Sonnendrücker ont alors proposé le système adimensionné suivant :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + \frac{v_\perp}{\varepsilon} \cdot \nabla_{x_\perp} f_\varepsilon + v_\parallel \partial_{x_\parallel} f_\varepsilon + (E_\varepsilon + \frac{v \wedge e_3}{\varepsilon}) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, \\ E_\varepsilon = (-\nabla_{x_\perp} V_\varepsilon, -\varepsilon \partial_{x_\parallel} V_\varepsilon), \\ f_\varepsilon|_{t=0} = f_{0,\varepsilon}(x, v), \quad \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3} f_{0,\varepsilon} dx dv = 1. \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$, $x := (x_\perp, x_\parallel) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}$, $v := (v_\perp, v_\parallel) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et couplé à l'équation de Poisson :

(1) dans le cas de l'équation de Vlasov-Poisson pour les ions (notée $(\text{VPI})_{\text{lin}}$ pour simplifier) :

$$(1.7) \quad V_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_{x_\parallel}^2 V_\varepsilon - \Delta_{x_\perp} V_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon dv - 1,$$

(2) dans le cas de l'équation de Vlasov-Poisson pour les électrons (notée (VPE) pour simplifier) :

$$(1.8) \quad -\varepsilon^2 \partial_{x_\parallel}^2 V_\varepsilon - \Delta_{x_\perp} V_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon dv - 1.$$

L'étude menée dans [10] du comportement des solutions dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ est uniquement menée en 2D (en supposant que la donnée initiale ne dépend pas des variables parallèles x_\parallel et v_\parallel); d'autre part, elle est faite pour l'équation (VPE) , mais on peut facilement se convaincre qu'elle se transpose sans aucune difficulté pour le cas $(\text{VPI})_{\text{lin}}$, du moins en 2D. Pour d'autres études récentes du cas 2D, citons par ailleurs les travaux [2, 9, 11, 24]. Notre but ici est d'expliquer comment on peut étendre l'étude dans un cadre tridimensionnel, ce

qui fait l'objet des articles [20, 22]. La différence principale avec le cas 2D apparait dans la dégénérescence du Laplacien dans l'équation de Poisson (1.7) ou (1.8) selon la direction parallèle. Cet effet n'apparaissait pas en 2D à cause du "zoom" dans le plan perpendiculaire. Du fait de la différence entre les directions perpendiculaire et parallèle, on observe donc que ce problème asymptotique peut être interprété comme une limite quasineutre *anisotrope*. A première vue, il peut sembler raisonnable de penser que cet aspect anisotrope peut rendre les choses plus favorables (ou au moins ne les rend pas pires) que pour la limite quasineutre *isotrope*, décrite dans le paragraphe suivant. Cette intuition sera bien vérifiée pour l'étude de l'équation $(\text{VPI})_{\text{lin}}$, que nous évoquerons dans la Section 3. En revanche, assez étonnamment, pour l'équation (VPE), la situation devient en fait plus singulière que dans le cas isotrope ; cela sera discuté dans la Section 4.

2. ETAT DE L'ART SUR LA LIMITE QUASINEUTRE DE L'ÉQUATION DE VLASOV-POISSON

Comme nous venons de le voir, l'étude de l'approximation "rayon de Larmor fini" tridimensionnelle peut être vue comme une limite quasineutre anisotrope. Afin de mieux appréhender les conséquences de l'anisotropie, il est bien sûr important de commencer par comprendre la limite quasineutre sans aucun effet anisotrope. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'exposer de manière brève quelques éléments sur cette limite. Nous considérons ainsi l'équation de Vlasov-Poisson quasineutre :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon - \nabla_x V_\varepsilon \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, \\ -\varepsilon \Delta_x V_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon dv - -1, \\ f_{\varepsilon, |t=0} = f_{0, \varepsilon}, \end{cases}$$

avec $\varepsilon \ll 1$ un petit paramètre, et pour $t \geq 0, x \in \mathbb{T}^d, v \in \mathbb{R}^d$ (avec $d = 1, 2$, ou 3). La limite formelle est obtenue très facilement, en considérant directement $\varepsilon = 0$. Nous en déduisons l'équation suivante :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^d} f dv = 1, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Remarquons que l'équation de Poisson dégénère dans la limite quasineutre en une équation de contrainte, qui correspond à une contrainte d'incompressibilité. Le champ de force $-\nabla_x V$ qui apparait à la limite correspond alors à une force de pression, obtenue comme le multiplicateur de Lagrange associé à celle-ci. Cette équation est par conséquent le pendant cinétique des équations d'Euler incompressible de la mécanique des fluides. Un aspect intéressant de cette équation est qu'elle fait sens en une dimension d'espace, contrairement à l'équation d'Euler incompressible. Observons par ailleurs que si nous considérons des données *monocinétiques*, c'est-à-dire de la forme :

$$f(t, x, v) = \rho(t, x) \delta_{v=u(t, x)},$$

alors (ρ, u) vérifie précisément les équations d'Euler incompressible :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla_x p, \\ \rho = 1, \quad \text{div } u = 0, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Malheureusement, il se trouve que la limite formelle vers (2.2) est *fausse* en général (voir l'acte de conférence de E. Grenier [18] pour un énoncé de théorème) : cela est dû à l'existence d'instabilités cinétiques pour l'équation de Vlasov-Poisson. Ces instabilités sont connues sous la dénomination d'instabilités à deux bosses : typiquement, une donnée initiale qui serait la somme de deux maxwelliennes est instable, alors qu'une maxwellienne seule est stable. L'étude de ces instabilités (pour les équations de Vlasov-Poisson linéarisées) a été initiée par O. Penrose [32], qui a énoncé des critères d'instabilité ou d'instabilité ; on se référera à l'article de Y. Guo et W. Strauss [19] pour une première justification de l'instabilité des deux bosses dans un cadre non linéaire. Le fait que ces instabilités jouent un rôle crucial dans la limite quasineutre est facile à voir. En effet, par le changement d'échelle $(t, x) \rightarrow (\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}})$, on voit qu'on se ramène de l'équation (2.1) avec $\varepsilon \ll 1$ à (2.1) avec $\varepsilon = 1$. Ainsi, la limite quasineutre peut être vue comme l'étude du comportement en temps long pour l'équation de Vlasov-Poisson. De ce point de vue, elle est donc reliée à l'amortissement Landau, récemment étudié par C. Mouhot et C. Villani dans [28].

Une autre difficulté dans l'étude de la limite quasineutre provient de l'apparition d'oscillations haute fréquence et de grande intensité pour le champ électrique. Celles-ci sont souvent appelées "ondes plasmas". Elles peuvent être décrites à partir de l'équation des ondes suivante, obtenue à partir de (2.1) :

$$(2.4) \quad \varepsilon \partial_t^2 \operatorname{div} E_\varepsilon + \operatorname{div} E_\varepsilon = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \partial_{x_i, x_j}^2 \int f_\varepsilon v_i v_j dv - \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq d} \partial_i (E_{\varepsilon, i} \operatorname{div} E_\varepsilon).$$

Ainsi, E_ε se comporte en $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\pm it\sqrt{\varepsilon}}$; il est cependant possible, grâce à une description précise des ondes, de filtrer leur contribution, grâce à des méthodes à présent classiques en mécanique des fluides.

Nous proposons à présent un court état de l'art sur les différentes méthodes mathématiques qui ont été proposées pour étudier cette limite singulière.

- (1) *Méthodes de compacité.* Nous avons regroupé sous cette dénomination des méthodes de type compacité permettant de prouver des résultats sans faire d'hypothèse sur la forme de la donnée initiale (i.e. sur leur stabilité). Y. Brenier et E. Grenier [5], dans un cadre stationnaire, puis E. Grenier [16] pour le cas dépendant du temps, proposent une analyse de la limite quasineutre, en introduisant des mesures de défaut à la P. Gérard et L. Tartar, qui permettent de tenir compte des oscillations en temps, espace et vitesse dues aux éventuelles instabilités à double bosse. Le prix à payer est que l'on obtient une description finale assez peu précise, faisant intervenir des mesures de défaut, et on ne sait en général pas dire quand celles-ci sont nulles.

L'autre possibilité est de se restreindre à un régime de régularité analytique, tel que cela a été fait par E. Grenier dans [17] ; le principe est d'obtenir des estimations uniformes en ε , dans l'esprit du théorème de Cauchy-Kovalevskaya (voir par exemple [30, 31]). Il apparaît en effet que les instabilités à deux bosses sont essentiellement de nature Sobolev et n'ont pas d'effet dans l'analytique.

- (2) *Méthode d'entropie relative.* La contribution la plus satisfaisante du point de vue physique est due à Y. Brenier [4], qui a proposé une méthode basée sur la structure hamiltonienne des équations, dite de l'entropie relative (ou énergie modulée). Celle-ci lui a permis de dériver l'équation d'Euler incompressible à partir de (2.1) pour des données initiales peu régulières, convergeant (dans un sens assez faible) vers des

données monocinétiques. On s'attend à ce que celles-ci ne développent pas d'instabilité, car elles correspondent au cas limite d'une maxwellienne à température nulle. Ce travail a ensuite été complété par N. Masmoudi [27] pour un cas mal-préparé (voir également l'article de F. Golse et L. Saint-Raymond [14]). Citons également le travail plus récent [23] pour une adaptation de la méthode pour traiter la limite quasineutre pour l'équation de Vlasov-Poisson pour les ions (i.e. avec l'équation de Poisson semi-linéaire (1.3)). Nous ne développerons pas plus ce point car nous n'utiliserons pas cette méthode pour le problème qui nous intéresse ici.

Pour résumer, les seuls cas où l'on sait décrire assez précisément la limite quasineutre sont ceux où on suppose de l'analyticité ou une forte hypothèse de stabilité sur la donnée initiale.

3. LE CAS DES IONS DANS UN BAIN D'ÉLECTRONS THERMALISÉS

Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas de l'équation $(VPI)_{\text{lin}}$ (1.6)-(1.7), pour laquelle l'anisotropie du problème rend la limite moins singulière que la limite quasineutre seule.

3.1. Énoncé du théorème prouvé. Avant d'énoncer un théorème, on peut se demander quelle est la limite formelle attendue. En s'appuyant sur le développement en puissances de ε de (1.5), on s'attend à obtenir du transport libre uniquement dans la direction parallèle, avec un mouvement de dérive donné par E^\perp dans le plan perpendiculaire. D'autre part, à cause du zoom dans le plan perpendiculaire, toute variation sur une échelle du rayon de Larmor n'est pas négligeable, ce qui signifie qu'il faut tenir compte du mouvement hélicoïdal des particules ; cependant, on a vu que la fréquence de rotation typique était très grande, donc on s'attend à ce que les particules ne ressentent que l'effet d'une moyenne sur une rotation. Le prototype d'équation limite, dite *gyrocinétique*, est l'équation suivante :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial_t f + v_\parallel \partial_{x_\parallel} f + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} E_\parallel(x + R(\tau)v_\perp) d\tau \right) \partial_{v_\parallel} f \\ + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} E^\perp(x + R(\tau)v_\perp) d\tau \right) \cdot \nabla_x f = 0, \end{aligned}$$

où $R(\tau)$ désigne la rotation d'axe e_3 et d'angle τ . Il s'agit des équations utilisées par les physiciens pour simuler les plasmas fortement magnétisés ; on pourra par exemple se référer à l'article de V. Grandgirard et al. [15]. Dans [10], E. Frénod et E. Sonnendrücker montrent la convergence vers un tel système dans un cadre 2D. Le théorème que nous démontrons dans [20] est la généralisation de ce résultat au cadre 3D. Notons en particulier que malgré la limite quasineutre dans la direction parallèle, nous n'avons pas besoin de faire d'hypothèse particulière ni sur la forme (i.e. la stabilité), ni sur la régularité de la donnée initiale.

Théorème 1. *Soit $(f_{0,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ une suite de données initiales positives, de moyenne 1, vérifiant :*

- $(f_{\varepsilon,0})_{\varepsilon>0}$ borné uniformément en ε dans $L^1_{x,v} \cap L^p_{x,v}$ (pour $p > 3$).
- L'énergie initiale est uniformément bornée par rapport à ε :

$$\mathcal{E}(f_{\varepsilon,0}) = \left(\int f_{\varepsilon,0} |v|^2 dv dx + \varepsilon \int V_{\varepsilon,0}^2 dx + \varepsilon \int |\nabla_{x_\perp} V_{\varepsilon,0}|^2 dx + \varepsilon^3 \int |\partial_{x_\parallel} V_{\varepsilon,0}|^2 dx \right) \leq C_0.$$

Alors, à extraction près, f_ε (solution faible à $(VPI)_{lin}$ avec donnée initiale $f_{0,\varepsilon}$) converge faiblement- $*$ L^p vers $f := \int_0^{2\pi} G(t, x + \mathcal{R}(\tau)v, R(\tau)v) d\tau$ où G est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t G + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} E^\perp(t, \tau, x + \mathcal{R}(-\tau)v) d\tau \right) \cdot \nabla_x G \\ \quad + \text{termes "étranges" de transport} = 0 \\ E = -\nabla\Phi, \quad \Phi - \Delta\Phi = \int G(t, x + \mathcal{R}(\tau)v, R(\tau)v) dv - 1, \\ G|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Ici : $\mathcal{R}(\tau) = R(\pi/2) - R(\pi/2 + \tau)$.

Remarque 1. Volontairement, pour ne pas alourdir l'exposition, nous avons écrit le Théorème 1 de manière imprécise, en faisant apparaître des "termes étranges de transport" dans l'équation asymptotique. Ces termes (déjà présents dans le cadre 2D de [10]) n'apparaissent pas dans une analyse heuristique sommaire et ne semblent pas avoir de signification physique précise. Pour cette raison, ils n'apparaissent pas dans les équations gyrocinétiques qui sont utilisées pour les simulations numériques de plasmas. Cependant, dans l'article [21], nous avons proposé une nouvelle interprétation de ces termes : ils sont en fait dus à des oscillations en temps sur le champ électrique E_ε , qui font qu'un effet a priori d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dans le développement asymptotique (1.5), appelé dérive de polarisation, est en fait d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$, c'est-à-dire du même ordre que la dérive électrique. Il est donc normal que cette dérive ait une conséquence sur l'équation limite, et cela se concrétise par l'apparition des termes "étranges" en question.

3.2. Principe de la preuve du Théorème 1.

3.2.1. *Dynamique parallèle seule.* Pour comprendre ce qui se passe, concentrons-nous pour commencer sur le cas 1D, où l'on considère uniquement la dynamique parallèle. Le système étudié est alors le suivant :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v_\parallel \partial_{x_\parallel} f_\varepsilon + E_\varepsilon \partial_{v_\parallel} f_\varepsilon = 0, \\ E_\varepsilon = -\varepsilon \partial_{x_\parallel} V_\varepsilon, \\ V_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_{x_\parallel}^2 V_\varepsilon = \int f_\varepsilon dv_\parallel - 1. \end{cases}$$

Ce système peut, à première vue, sembler très similaire au système quasineutre (2.1) évoqué à la section précédente, mais la situation est en fait bien plus favorable. De manière classique, on peut d'abord s'appuyer sur la conservation des normes $L_{x,v}^p$, de la positivité de f_ε et sur la conservation de l'énergie physique pour montrer que :

$$\rho_\varepsilon (:= \int f_\varepsilon dv_\parallel) \in L_t^\infty(\mathbb{R}^+, L_{x_\parallel}^{3/2}),$$

uniformément en $\varepsilon > 0$. Grâce à l'équation vérifiée par V_ε , par changement d'échelle, on montre alors facilement que $E_\varepsilon \in L_t^\infty(\mathbb{R}^+, L_{x_\parallel}^{3/2})$, uniformément en ε . Un tel contrôle (basse fréquence) sur le champ électrique est hors de portée pour la limite quasineutre précédemment étudiée.

Ceci traduit en quelque sorte la "faiblesse" des ondes plasmas pour $(VPI)_{lin}$, qui provient de la présence du terme V_ε non pénalisé dans l'équation de Poisson (et qui provient de la densité des électrons). En effet, l'équation des "ondes" plasma est ici de la forme suivante :

$$\partial_t^2 \left(V_\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_{x_\parallel}^2 V_\varepsilon \right) - \partial_{x_\parallel}^2 V_\varepsilon = (\text{source}),$$

ce qui est très différent de celle obtenue pour la limite quasineutre (2.4). En effet, on obtient ici des ondes en $\sqrt{\frac{|k|^2}{1+\varepsilon^2|k|^2}} e^{\pm it\sqrt{\frac{|k|^2}{1+\varepsilon^2|k|^2}}}$ (où $k \in \mathbb{Z}$ désigne la variable de Fourier).

Avec ce contrôle basse fréquence, il est alors possible d’exploiter un gain de compacité en moyenne obtenu grâce à l’équation de transport cinétique vérifiée par f_ε . Plus précisément, on gagne de la régularité (uniforme) en (t, x_\parallel) sur les moments en v_\parallel de f_ε grâce à un lemme de moyenne (nous détaillerons plus cet argument dans le paragraphe suivant). Concernant les lemmes de moyenne en théorie cinétique, nous nous référons aux articles fondateurs [12] et [8] (voir également l’article de revue de P.E. Jabin [25] à ce sujet). L’utilisation d’un tel argument de compacité par compensation est similaire dans son esprit à celui de R.J. DiPerna et P.L. Lions [7] pour prouver la stabilité faible pour Vlasov-Maxwell.

3.2.2. Dynamique totale. On considère à nouveau la dynamique totale. La première étape est une étape de filtrage ; comme dans le cas 2D de [10], on se ramène (modulo les termes “étranges” de transport) de

$$\partial_t f_\varepsilon + \frac{v_\perp}{\varepsilon} \cdot \nabla_{x_\perp} f_\varepsilon + v_\parallel \partial_{x_\parallel} f_\varepsilon + (E_\varepsilon + \frac{v \wedge e_3}{\varepsilon}) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0,$$

à l’équation filtrée :

$$(3.3) \quad \partial_t g_\varepsilon + v_\parallel \partial_{x_\parallel} g_\varepsilon + E_{\varepsilon, \parallel}(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v) \partial_{v_\parallel} g_\varepsilon + E_\varepsilon^\perp(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v) \cdot \nabla_x g_\varepsilon = 0.$$

Dans un second temps, comme pour la dynamique parallèle seule, il est possible de montrer des estimations uniformes sur le champ électrique : par régularité elliptique on obtient la régularité uniforme en ε

$$E_\varepsilon \in L_t^\infty(\mathbb{R}^+, L_{x_\parallel}^{3/2}(\mathbb{T}, W_{x_\perp}^{1,3/2})).$$

Ainsi, on obtient de la compacité selon la variable x_\perp sur le champ électrique ; il nous manque uniquement de la compacité en (t, x_\parallel) pour passer à la limite. Le principe, comme pour la dynamique parallèle seule, est d’exploiter un gain de compacité en moyenne pour la solution g_ε de l’équation de transport cinétique (parallèle) :

$$\begin{aligned} \partial_t g_\varepsilon + v_\parallel \partial_{x_\parallel} g_\varepsilon &= -E_{\varepsilon, \parallel}(t, x + \mathcal{R}(t/\varepsilon)v) \partial_{v_\parallel} g_\varepsilon \\ &\quad - E_\varepsilon^\perp(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v) \cdot \nabla_x g_\varepsilon. \end{aligned}$$

On considère tout le membre de droite comme une source. On peut voir que celle-ci contient une dérivée en x ; bien entendu, une telle dérivée spatiale serait en mesure de faire s’écrouler une stratégie basée sur un lemme de moyenne (il s’agit d’un cas limite, qui ne peut pas être atteint sans hypothèse supplémentaire sur la fonction de distribution). Cependant, on remarque qu’ici, la dérivée spatiale est uniquement selon la variable perpendiculaire x_\perp . Or, la dynamique perpendiculaire est en quelque sorte transverse par rapport au transport parallèle : l’idée est alors d’utiliser une version anisotrope des lemmes de moyenne, autorisant des valeurs abstraites dans un espace de Sobolev à indice négatif.

Lemme 1. *Soit $1 < p < +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\Omega = \Omega_{t,x} \times \Omega_v$. Soit $f, g \in L_{t,x,v}^p(\Omega, W_y^{\lambda,p})$ vérifiant l’équation de transport*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = (I - \Delta_v)^{m/2} g,$$

avec $m \in \mathbb{R}^+$. Alors, pour toute fonction $\Psi \in C_c^\infty(\Omega_v)$, $\rho_\Psi(t, x) = \int_{\Omega_v} f(t, x, v) \Psi(v) dv \in W_{t,x}^{\alpha_p, p}(\Omega_{t,x}, W_y^{\lambda,p})$ pour un certain $\alpha_p > 0$.

Le fait qu'il n'y ait pas dérivée selon x_{\parallel} dans la source est profondément lié à la physique du problème. On a en effet vu dans le développement asymptotique (1.5) qu'après rescaling, la seule dérive qui intervient à l'ordre dominant était la dérive électrique E^{\perp} , qui agit uniquement dans le plan perpendiculaire¹.

Pour finir, il s'agit de passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation filtrée (3.3). Comme dans le cas 2D traité par E. Frénod et E. Sonnendrücker [10], un outil utile est la convergence à deux échelles (voir G. Nguetseng [29] et G. Allaire [1]), car elle est bien adaptée à l'apparition d'oscillations en temps de fréquence $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ créées par le champ magnétique intense. Quitte à extraire, on peut supposer que g_{ε} converge faiblement-* vers une fonction g et que $E_{\varepsilon}(t, x, v)$, converge à deux échelles vers une fonction $\mathcal{E}(t, \tau, x, v)$. Pour passer à la limite, la difficulté est bien entendu concentrée sur les termes non linéaires. Il est commode de considérer des fonctions test "tensorisées" de la forme $\Psi(t, x, v_{\perp})\xi(v_{\parallel})$. Pour simplifier les notations, on introduit les moments parallèles $\eta_{\varepsilon}(t, x, v_{\perp}) := \int g_{\varepsilon} \xi(v_{\parallel}) dv_{\parallel}$ et $\eta(t, x, v_{\perp}) := \int g \xi(v_{\parallel}) dv_{\parallel}$. Grâce au Lemme 1 et un argument d'interpolation, on peut montrer que $\eta_{\varepsilon} \rightarrow \eta$ fortement dans $L^3_{t,\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^3_{x_{\parallel},\text{loc}}(\mathbb{T}, W^{-\theta,3}_{x_{\perp},v_{\perp},\text{loc}}))$, pour un $0 > \theta > -1$.

Un terme non linéaire typique est donné par le terme d'advection $E_{\varepsilon}^{\perp}(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v) \cdot \nabla_x g_{\varepsilon}$. Le point important est que l'on peut "factoriser" le moment η_{ε} (resp. η) après application des fonctions test. Cela est possible grâce au fait que $E_{\varepsilon}^{\perp}(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v)$ ne dépend pas v_{\parallel} . Cela n'est en rien miraculeux mais provient encore une fois de la physique du problème : en effet, la moyenne selon un petit cercle de giration ne dépend que de la projection de v sur le plan perpendiculaire. On écrit alors la majoration :

$$\begin{aligned} & \left| \int \eta_{\varepsilon} E_{\varepsilon}^{\perp}(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v) \cdot \nabla_x \Psi(t, x, v_{\perp}) dt dx_{\perp} dx_{\parallel} dv_{\perp} \right. \\ & \quad \left. - \int \eta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E}^{\perp}(t, \tau, x + \mathcal{R}(-\tau)v) d\tau \cdot \nabla_x \Psi dt dx dv_{\perp} \right| \\ & \leq \left| \int \left(E_{\varepsilon}^{\perp}(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E}^{\perp}(t, \tau, x + \mathcal{R}(-\tau)v) d\tau \right) \cdot \nabla_x \Psi \eta dt dx dv_{\perp} \right| \\ & \quad + \left| \int E_{\varepsilon}^{\perp}(t, x + \mathcal{R}(-t/\varepsilon)v) \cdot \nabla_x \Psi(t, x, v_{\perp}) (\eta_{\varepsilon} - \eta) dt dx_{\perp} dx_{\parallel} dv_{\perp} \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, par définition de la convergence à deux échelles de E_{ε} . Le deuxième peut être borné de la manière suivante :

$$|(2)| \leq C \|E_{\varepsilon}\|_{L^{3/2}_{t,\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{3/2}_{x_{\parallel},\text{loc}}(\mathbb{T}, W^{\theta,3/2}_{x_{\perp},v_{\perp},\text{loc}}))} \|\eta_{\varepsilon} - \eta\|_{L^3_{t,\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^3_{x_{\parallel},\text{loc}}(\mathbb{T}, W^{-\theta,3}_{x_{\perp},v_{\perp},\text{loc}}))},$$

et cela permet de conclure.

4. LE CAS DES ÉLECTRONS DANS UN BAIN D'IONS FIXES

On s'intéresse à présent au cas de l'équation (VPE) (1.6)-(1.8).

4.1. Un résultat dans l'analytique pour des données mono-cinétiques. Comme dans l'étude du cas précédent, il est intéressant de commencer par étudier la dynamique parallèle

1. Il faut également prendre en compte la dynamique due aux termes "étranges", mais ceux-ci n'entraînent une dérive que dans le plan perpendiculaire également.

seule :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v_\parallel \partial_{x_\parallel} f_\varepsilon + E_\varepsilon \partial_{v_\parallel} f_\varepsilon = 0, \\ E_\varepsilon = \partial_{x_\parallel} V_\varepsilon, \\ -\varepsilon \partial_{x_\parallel}^2 V_\varepsilon = \int f_\varepsilon dv - 1, \end{cases}$$

qui cette fois correspond précisément à la limite quasineutre de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 1. Au vu de la discussion précédente, cette observation permet d'ores et déjà d'affirmer que toute limite formelle pour (1.6)-(1.8) est fautive en général. Cependant, il est naturel, comme pour la limite quasineutre isotrope, de considérer des données initiales vérifiant une condition de stabilité. Dans notre situation, il semble délicat d'identifier précisément les équilibres stables, du fait de la dynamique perpendiculaire. Pour simplifier, on propose de se placer dans le cadre le plus simple possible, qui correspond à des données monocinétiques suivant la vitesse parallèle, et avec une dynamique perpendiculaire dans un certain sens la plus simple possible. Ainsi, dans [22], après quelques manipulations de filtrage (afin d'éliminer certaines oscillations dues au champ magnétique), on considère des données monocinétiques de la forme

$$(4.2) \quad g_\varepsilon(t, x, v) = \rho_\varepsilon(t, x_\perp, x_\parallel) \delta_{v_\parallel = u_{\parallel, \varepsilon}(t, x_\perp, x_\parallel)} \delta_{v_\perp = 0},$$

et cela nous conduit naturellement à l'équation d'Euler-Poisson sans pression suivante :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \nabla_\perp \cdot (E_\varepsilon^\perp \rho_\varepsilon) + \partial_\parallel (u_{\parallel, \varepsilon} \rho_\varepsilon) = 0, \\ \partial_t u_{\parallel, \varepsilon} + \nabla_\perp \cdot (E_\varepsilon^\perp u_{\parallel, \varepsilon}) + u_{\parallel, \varepsilon} \partial_\parallel u_{\parallel, \varepsilon} = -\varepsilon \partial_\parallel \phi_\varepsilon(t, x), \\ E_\varepsilon^\perp = -\nabla^\perp \phi_\varepsilon, \\ -\varepsilon^2 \partial_\parallel^2 \phi_\varepsilon - \Delta_\perp \phi_\varepsilon = \rho_\varepsilon - 1. \end{cases}$$

Ce système peut être considéré comme un modèle-jouet, qui nous permettra de constater les effets de l'anisotropie sur la limite quasineutre. Pour commencer, la limite formelle est aisément obtenue, en prenant directement $\varepsilon = 0$:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_\perp \cdot (E^\perp \rho) + \partial_\parallel (u_\parallel \rho) = 0, \\ \partial_t u_\parallel + \nabla_\perp \cdot (E^\perp u_\parallel) + u_\parallel \partial_\parallel u_\parallel = -\partial_\parallel p(t, x_\parallel), \\ E^\perp = \nabla^\perp \Delta_\perp^{-1} \left(\rho - \int_{\mathbb{T}^2} \rho dx_\perp \right), \\ \int_{\mathbb{T}^2} \rho dx_\perp = 1. \end{cases}$$

Ce système limite correspond à un système hydrodynamique anisotrope (dans la mesure où les dynamiques perpendiculaire et parallèle sont très différentes), apparemment nouveau dans la littérature. Comme pour le cas de $(\text{VPI})_{\text{lin}}$, la dynamique perpendiculaire est donnée par une advection par la dérive électrique E^\perp . Celle dans la direction parallèle est dominée par une force de pression provenant d'une contrainte d'incompressibilité en moyenne dans le plan perpendiculaire :

$$(4.5) \quad \int_{\mathbb{T}^2} \rho dx_\perp = 1,$$

qui provient de la dégénérescence de l'équation de Poisson. Ce système est dans un sens strict compressible (car $\text{div}(E^\perp, u_\parallel) \neq 0$), mais également en quelque sorte "incompressible en moyenne", à cause de cette contrainte.

Bien qu'on ait considéré des données monocinétiques pour obtenir la dérivation, ce qui en principe devrait nous conduire à un système de type fluide avec une seule phase, le système (4.4) apparaît comme un système de type Euler multi-phasique. En effet, on observe que ce système peut être interprété comme un système infini de fluides couplés par la variable x_\perp (à travers la relation (4.5)). Pour cette raison, comme nous le verrons plus tard, la limite formelle n'est pas vraie en général pour des données à régularité Sobolev, à cause d'instabilités de type multi-flux qui sévissent dans les systèmes d'Euler multi-fluides et qui prennent le dessus dans la limite quasineutre. On montre néanmoins, pour des données analytiques, l'existence locale pour (4.4) de solutions analytiques, et leur convergence (toujours localement en temps) vers des solutions du système limite.

Il est crucial pour la suite, en s'appuyant sur la linéarité de l'équation de Poisson, de décomposer le champ électrique de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_\varepsilon + \nabla_\perp \cdot (E_\varepsilon^\perp \rho_\varepsilon) + \partial_\parallel (u_{\parallel, \varepsilon} \rho_\varepsilon) = 0, \\ \partial_t u_{\parallel, \varepsilon} + \nabla_\perp \cdot (E_\varepsilon^\perp v_{\parallel, \varepsilon}) + u_{\parallel, \varepsilon} \partial_\parallel u_{\parallel, \varepsilon} = -\varepsilon \partial_\parallel \phi_\varepsilon(t, x) - \partial_\parallel V_\varepsilon(t, x_\parallel), \\ E_\varepsilon^\perp = -\nabla^\perp \phi_\varepsilon, \\ -\varepsilon^2 \partial_\parallel^2 \phi_\varepsilon - \Delta_\perp \phi_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \int \rho_\varepsilon dx_\perp, \\ -\varepsilon \partial_\parallel^2 V_\varepsilon = \int \rho_\varepsilon dx_\perp - 1. \end{array} \right.$$

Les difficultés sont alors concentrées sur le potentiel V_ε , alors que pour ϕ_ε , la situation est bien plus favorable grâce à un contrôle basse fréquence. Le théorème dans l'analytique est alors le théorème suivant. Une partie non triviale est de donner un temps d'existence locale uniforme en ε pour des solutions analytiques à (4.3).

Théorème 2. *Etant donnée une suite de données analytiques $(\rho_{0, \varepsilon} > 0, u_{0, \varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ uniformément bornées en ε , il existe $T > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution analytique $(\rho_\varepsilon > 0, u_{\parallel, \varepsilon})$ au système (4.3) sur $[0, T]$.*

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a les convergences (fortes) suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &\rightarrow \rho, & u_{\parallel, \varepsilon} - \frac{1}{i}(E_+ e^{it/\sqrt{\varepsilon}} - E_- e^{-it/\sqrt{\varepsilon}}) &\rightarrow u_\parallel, \\ -\sqrt{\varepsilon} \partial_{x_\parallel} V_\varepsilon - (E_+ e^{it/\sqrt{\varepsilon}} + E_- e^{-it/\sqrt{\varepsilon}}) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

où (ρ, u_\parallel) est solution forte au système (4.4) sur $[0, T]$ avec données initiales :

$$\rho(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(0), \quad u_\parallel(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u_{\parallel, \varepsilon}(0) - \int_{\mathbb{T}^2} \rho_\varepsilon u_{\parallel, \varepsilon} dx_\perp(0) \right).$$

En outre, $E_+(t, x_\parallel), E_-(t, x_\parallel)$ sont des correcteurs données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E_\pm + \left(\int_{\mathbb{T}^2} \rho v dx_\perp \right) \partial_{x_\parallel} E_\pm = 0, \\ E_\pm|_{t=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\varepsilon} \partial_{x_\parallel} V_\varepsilon(0) \pm i \int_{\mathbb{T}^2} \rho_\varepsilon v_\varepsilon dx_\perp(0) \right). \end{array} \right.$$

Remarque 2. *Il est intéressant de comparer ce résultat à celui démontré par G. Loeper dans [26], qui concerne la limite quasineutre de l'équation d'Euler-Poisson isotrope suivante :*

$$(4.6) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \nabla \cdot (u_\varepsilon \rho_\varepsilon) = 0, \\ \partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = -\nabla \phi_\varepsilon(t, x), \\ -\varepsilon \Delta \phi_\varepsilon = \rho_\varepsilon - 1. \end{cases}$$

La convergence vers Euler incompressible est démontrée pour des données à régularité Sobolev, ce qui indique bien que c'est l'anisotropie qui rend les choses singulières dans notre problème.

Nous nous contentons ici de quelques mots sur la preuve du Théorème 2 et renvoyons à [22] pour plus de détails. Elle constitue une adaptation de la preuve de E. Grenier pour la limite quasineutre isotrope dans [17]; comme nous l'avons déjà dit, il s'agit d'obtenir des estimations uniformes en ε pour des normes analytiques, dans l'esprit du théorème de Cauchy-Kovalevskaya. La différence principale réside dans le fait que pour les équations considérées ici, il y a une dynamique transverse (la dynamique perpendiculaire) additionnelle, que l'on doit gérer. Un point crucial est l'obtention de l'équation décrivant les "ondes plasmas", qui permet de décrire les oscillations en temps sur la partie "singulière" du champ électrique (qui correspond à $E_{\varepsilon, \parallel} := \partial_{\parallel} V_\varepsilon$) :

$$(4.7) \quad \varepsilon \partial_t^2 \partial_{x_{\parallel}} E_{\varepsilon, \parallel} + \partial_{x_{\parallel}} E_{\varepsilon, \parallel} = \partial_{x_{\parallel}}^2 \int \rho_\varepsilon v_\varepsilon^2 dx_{\perp} - \varepsilon \partial_{x_{\parallel}} [E_{\varepsilon, \parallel} \partial_{x_{\parallel}} E_{\varepsilon, \parallel}] + \partial_{x_{\parallel}} \int \rho_\varepsilon (\varepsilon \partial_{x_{\parallel}} \phi_\varepsilon) dx_{\perp}.$$

Il s'agit d'une équation très similaire à celle obtenue dans le cas isotrope (voir (2.4)) : cela montre que la dynamique transverse ne perturbe pas (trop) l'évolution des ondes plasmas.

4.2. Remarques sur l'optimalité du résultat. Le Théorème 2 repose sur des hypothèses assez fortes d'analyticité : il est légitime de s'interroger sur leur nécessité. En fait, comme nous l'avons déjà annoncé, le résultat est faux en général si on ne s'autorise qu'un contrôle Sobolev sur la donnée initiale. Comme pour la limite quasineutre pour l'équation de Vlasov-Poisson, cela est dû à l'existence d'instabilités de type multi-flux, qui peuvent apparaître dans les systèmes d'Euler incompressible multi-phasiques. Ces instabilités ont été étudiées par S. Cordier, E. Grenier et Y. Guo dans [6] pour le système :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_\Theta + \operatorname{div}(\rho_\Theta v_\Theta) = 0, \\ \partial_t v_\Theta + v_\Theta \cdot \nabla v_\Theta = -\nabla \Phi, \\ -\Delta \Phi = \sum_{\Theta=1}^2 \rho_\Theta - 1, \end{cases}$$

et le théorème d'instabilité non linéaire est le suivant :

Théorème 3 (S. Cordier, E. Grenier, Y. Guo). *Il existe un état stationnaire $(\rho_1, v_1, \rho_2, v_2)$ non linéairement instable au sens suivant. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, pour tout $s \geq 0$, il existe une donnée initiale $(\bar{\rho}_1(0), \bar{v}_1(0), \bar{\rho}_2(0), \bar{v}_2(0))$ telle que :*

$$\|(\rho_1, v_1, \rho_2, v_2) - (\bar{\rho}_1(0), \bar{v}_1(0), \bar{\rho}_2(0), \bar{v}_2(0))\|_{H^s} \leq \delta,$$

mais

$$\|(\rho_1, v_1, \rho_2, v_2) - (\bar{\rho}_1(T_\delta), \bar{v}_1(T_\delta), \bar{\rho}_2(T_\delta), \bar{v}_2(T_\delta))\|_{L^2} \geq \varepsilon_0,$$

en un temps $T_\delta = \mathcal{O}(|\log \delta|)$.

Le système (4.3) que nous étudions est légèrement plus complexe que (4.8), car il fait intervenir une dynamique dans la variable de couplage (précisément dictée par la dérive électrique), mais on peut en fait s'en affranchir en s'appuyant sur le fait que la partie 2D correspond à l'équation d'Euler incompressible en formulation vorticité. En considérant alors des données initiales de type "flots cisailés", on peut considérer des données sans dynamique perpendiculaire (voir [22]). Alors, par un argument de changement d'échelle, on en déduit que la limite formelle est fautive en régularité Sobolev.

Il est également intéressant de voir ce que l'on peut dire sur le caractère bien posé du système limite (4.4). Pour cela, nous nous basons sur l'étude due à Y. Brenier [3] sur les équations d'Euler incompressibles multi-phasiques (ici, (M, μ, θ) désigne un espace de probabilité) :

$$(4.9) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_\Theta + \operatorname{div}_x(\rho_\Theta v_\Theta) = 0, \\ \partial_t v_\Theta + v_\Theta \cdot \nabla_x v_\Theta = -\nabla_x p, \\ \int_M \rho_\Theta d\mu(\Theta) = 1. \end{cases}$$

Pour commencer, on voit assez facilement que ce système est mal posé dans les espaces de Sobolev (car elliptique en espace-temps en général) : en considérant des données de type "flots cisailés", cela permet à nouveau de voir que la régularité analytique est nécessaire. Par ailleurs, dans [3], grâce à une interprétation variationnelle des équations, Y. Brenier montre le résultat frappant :

Théorème 4 (Brenier). *Une solution forte (ρ_Θ, v_Θ) de (4.9) telle que v_Θ est irrotationnel pour tout Θ et telle qu'il existe une constante $r > 0$ telle que $\inf_{\Theta, t, x} \rho_\Theta(t, x) \geq r$ a un temps d'existence forcément fini.*

Cela implique qu'on ne peut pas faire mieux qu'un résultat local en temps.

RÉFÉRENCES

- [1] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [2] M. Bostan. The Vlasov-Poisson system with strong external magnetic field. Finite Larmor radius regime. *Asymptot. Anal.*, 61(2) :91–123, 2009.
- [3] Y. Brenier. A homogenized model for vortex sheets. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 138(4) :319–353, 1997.
- [4] Y. Brenier. Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(3-4) :737–754, 2000.
- [5] Y. Brenier and E. Grenier. Limite singulière du système de Vlasov-Poisson dans le régime de quasi neutralité : le cas indépendant du temps. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(2) :121–124, 1994.
- [6] S. Cordier, E. Grenier, and Y. Guo. Two-stream instabilities in plasmas. *Methods Appl. Anal.*, 7(2) :391–405, 2000. Cathleen Morawetz : a great mathematician.
- [7] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(6) :729–757, 1989.
- [8] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, and Y. Meyer. L^p regularity of velocity averages. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 8(3-4) :271–287, 1991.
- [9] E. Frénod and A. Mouton. Two-dimensional finite Larmor radius approximation in canonical gyrokinetic coordinates. *J. Pure Appl. Math. Adv. Appl.*, 4(2) :135–169, 2010.
- [10] E. Frénod and E. Sonnendrücker. The finite Larmor radius approximation. *SIAM J. Math. Anal.*, 32(6) :1227–1247 (electronic), 2001.
- [11] P. Ghendrih, M. Hauray, and A. Nouri. Derivation of a gyrokinetic model. Existence and uniqueness of specific stationary solutions. *Kinet. and Relat. Models*, 2(4) :707–725, 2009.

- [12] F. Golse, P.L. Lions, B. Perthame, and R. Sentis. Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *J. Funct. Anal.*, 76(1) :110–125, 1988.
- [13] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 78(8) :791–817, 1999.
- [14] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 13(5) :661–714, 2003.
- [15] V. Grandgirard et al. Global full- f gyrokinetic simulations of plasma turbulence. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 49 :173–182, 2007.
- [16] E. Grenier. Defect measures of the Vlasov-Poisson system in the quasineutral regime. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(7-8) :1189–1215, 1995.
- [17] E. Grenier. Oscillations in quasineutral plasmas. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(3-4) :363–394, 1996.
- [18] E. Grenier. Limite quasineutre en dimension 1. In *Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Saint-Jean-de-Monts, 1999)*, pages Exp. No. II, 8. Univ. Nantes, Nantes, 1999.
- [19] Y. Guo and W. A. Strauss. Nonlinear instability of double-humped equilibria. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12(3) :339–352, 1995.
- [20] D. Han-Kwan. The three-dimensional finite Larmor radius approximation. *Asymptot. Anal.*, 66(1) :9–33, 2010.
- [21] D. Han-Kwan. Effect of the polarization drift in a strongly magnetized plasma. *ESAIM Math. Mod. Num. Anal.*, 46(4) :929-947, 2012.
- [22] D. Han-Kwan. On the three-dimensional finite Larmor radius approximation : the case of electrons in a fixed background of ions. Soumis, 2011.
- [23] D. Han-Kwan. Quasineutral limit of the Vlasov-Poisson system with massless electrons. *Comm. Partial Differential Equations*, 36(8) :1385–1425, 2011.
- [24] M. Hauray and A. Nouri. Well-posedness of a diffusive gyro-kinetic model. *To appear in Ann. IHP (Analyse Non Linéaire)*, 2011.
- [25] P.-E. Jabin. Averaging lemmas and dispersion estimates for kinetic equations. *Riv. Mat. Univ. Parma (8)*, 1 :71–138, 2009.
- [26] G. Loeper. Quasi-neutral limit of the Euler-Poisson and Euler-Monge-Ampère systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(7-9) :1141–1167, 2005.
- [27] N. Masmoudi. From Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler system. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(9) :1913–1928, 2001.
- [28] C. Mouhot and C. Villani. On Landau damping. *To appear in Acta Mathematica*, 2011.
- [29] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989.
- [30] L. Nirenberg. An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. *J. Differential Geom.*, 6 :561–576, 1972.
- [31] T. Nishida. A note on a theorem of Nirenberg. *J. Differential Geom.*, 12 :629–633, 1977.
- [32] O. Penrose. Electrostatic instability of a uniform non-Maxwellian plasma. *Phys. Fluids*, 3 :258–265, 1960.

DMA, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45 RUE D’ULM, 75005 PARIS, FRANCE
E-mail address: daniel.han-kwan@ens.fr