



# Séminaire Laurent Schwartz

## EDP et applications

Année 2016-2017


Paul Laurain

### Analyse des problèmes conformément invariants

*Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications* (2016-2017), Exposé n° XII, 26 p.

<[http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP\\_2016-2017\\_\\_\\_\\_A12\\_0](http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2016-2017____A12_0)>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2016-2017.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques  
Le Bois-Marie • Route de Chartres  
F-91440 BURES-SUR-YVETTE  
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université  
Paris-Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<http://www.math.polytechnique.fr/>

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Analyse des problèmes conformément invariants

Paul Laurain - Institut Mathématiques de Jussieu (Paris 7)

## Résumé

Cet exposé constitue une revue d'une technique développée avec T. Rivière pour prouver des identités d'énergie pour les limites de suites de solutions de problèmes conformément invariants. Le point de départ est [34] où l'on prouve de telles identités pour tous les problèmes conformément invariants en dimension 2. Contrairement aux résultats existants, la preuve repose exclusivement sur l'invariance conforme. Elle a pu être transposée à beaucoup de problèmes ouverts en dimension supérieure, d'ordre supérieur ou encore à bord libre.

## 1 Introduction

L'invariance conforme est une propriété fondamentale dans bon nombre de problèmes physiques et géométriques. Au cours des dernières décennies c'est également devenue un thème à part en analyse non-linéaire. En effet les lagrangiens elliptiques conformément invariants<sup>1</sup> partagent des propriétés communes : d'une part leurs équations d'Euler-Lagrange sont critiques par rapport aux espaces où sont naturellement définies leurs solutions, d'autre part ces équations sont invariantes par dilatation et par conséquent les solutions sont sujettes à des phénomènes de *concentration*. Des questions aussi naturelles que la régularité des solutions ou la compacité des suites de solutions ne peuvent pas être résolues par des méthodes standards d'EDP elliptiques mais nécessitent une analyse fine des interactions entre les dérivées partielles d'ordre maximales et les termes non-linéaires.

En effet, l'invariance conforme force l'équation à avoir une structure particulière. Tout particulièrement en dimension 2, par exemple considérons une surface, il a été prouvé, voir le théorème 3.1, que tout point critique d'une fonctionnelle conformément invariante,  $u : \mathbb{R}^n$ , vérifie un système de la forme<sup>2</sup>

$$u = \dots u \text{ sur } \dots, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Voir section 3 pour une définition précise.

<sup>2</sup>En coordonnées cela se lit

$$\forall i = 1, \dots, n \quad - \quad u_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}^j \cdot \nabla u_j \text{ on}$$

où  $\cdot$  effectue le produit scalaire entre le champ de vecteurs  $\nabla u_j$  et les différentes composante de la matrice composée de vecteurs  $\dots$ .

où  $\frac{-1}{|\bar{h}|} \delta_{ij}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami positif et  $T$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami positif  $\frac{-1}{|\bar{h}|} \delta_{ij}$ . La remarque fondamentale faite dans [41], est le fait que  $T$  est anti-symétrique, ce qui a permis de généraliser à tous les points critiques de Lagrangien conformément invariant la *théorie de compacité par compensation* initialement introduite par Wente dans le cadre des surfaces à courbure moyenne constante (CMC) dans  $\mathbb{R}^3$ , voir section 2. Notamment Rivière a pu démontrer la conjecture de Hildebrandt, c'est à dire la régularité de tous les points critiques de Lagrangien conformément invariant.

Une fois la question de régularité résolue, vient naturellement celle du comportement des suites de solutions  $u_k$  d'énergie bornée. En effet, Rivière montre plus que la simple régularité, si on regarde attentivement la preuve, il s'agit en fait d'un résultat  $\epsilon$ -régularité, concept introduit par Sacks et Uhlenbeck pour les applications harmoniques [44], qui consiste à montrer que sous un certain niveau d'énergie (ne dépendant pas de l'application) alors toutes les normes sont uniformément contrôlée par l'énergie, voir le lemme 4.2. Par conséquent on en déduit que les suites de solutions convergent, pour la norme- $C^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , vers une solution limite en dehors d'un nombre fini de points  $\{a^1, \dots, a^l\}$  où l'énergie pourrait se concentrer au delà de  $\epsilon$ ,

$$u_k - u \rightarrow 0 \text{ dans } C_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{a^1, \dots, a^l\}) \quad p \in \mathbb{N}.$$

Reste alors à comprendre comment la convergence forte échoue-t-elle aux points  $a^i$ , en d'autres termes combien d'énergie s'est dissipée en  $a^i$ . Une analyse fine montre que l'énergie est perdue par concentration de solutions définies sur le plan  $\mathbb{R}^2$  en entier, appelée *bulles* en référence au problème des surfaces CMC. Plus précisément il existe des points  $a_k^i \rightarrow a^i$  et une famille de rayons de concentration associée  $r_k^i$  convergeant vers 0 tel que

$$u_k(r_k^i x + a_k^i) - u^i(x) \text{ dans } C_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{un nombre fini de points}\}) \quad p \in \mathbb{N},$$

où  $u^i$  est une bulle. Il est clair que l'énergie perdue lors du phénomène de concentration est au moins égale à celle des *bulles*  $u^i$ , d'où

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int |du_k|_h^2 d\text{vol}_h \geq \int |du|_h^2 d\text{vol}_h + \sum_{i=1}^l \int_{\mathbb{R}^2} |u^i|^2 dx. \quad (2)$$

Une question cruciale est de comprendre quand est ce que (2) est une égalité ou une inégalité stricte. Cette question est connue sous le nom de *d'identité d'énergie* : est ce que la perte d'énergie est due simplement à la concentration de *bulles* ou y a t il un phénomène additionnel de dissipation entre les *bulles* et la solution limite, c'est à dire dans les *cous*.

Après avoir introduit la problématique à travers une courte revue sur le problème de Plateau (section 2), nous allons définir ce que l'on entend par problème conformément invariant, compacité faible ou identités d'énergie et rappeler les grandes lignes de la preuve de la conjecture de Hildebrandt (section 3). Dans la section 4, nous nous intéresserons au problème de compacité des suites

de solutions, notamment en développant le concept d'identités d'énergie et en proposant un théorème englobant l'ensemble des problèmes conformément invariants en dimension 2. Enfin, dans une dernière partie, nous énumérons un certain nombre d'applications de cette méthode à la résolution d'autres problèmes.

## 2 Exemple archétypal : Les bulles de savon

Le problème de Plateau<sup>3</sup> consiste à chercher une surface d'aire minimale bordant un contour donné. Ce qui se traduit en termes de calcul des variations comme suit : étant donné une courbe fermée simple  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ , on cherche  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui minimise

$$A(u) = \int_D |u_x - u_y| dx dy$$

parmi l'ensemble des  $u$  tels que  $u(\partial D) = \gamma$ .

Toutefois, ce problème est très mal posé, puisque  $A$  est invariante par difféomorphisme, i.e.

$$A(u \circ \phi) = A(u)$$

pour tout  $\phi \in \text{Di}(D)$ . En particulier une suite minimisante n'a aucune chance de converger puisqu'on peut toujours la composer avec une suite non compacte de difféomorphismes. Cette difficulté fut surmontée par Douglas et Radó en 1930. Ils montrèrent qu'on pouvait se contenter de minimiser l'énergie de Dirichlet

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_D |u|^2 dx dy \quad A(u).$$

Qui elle est simplement invariante par le groupe des difféomorphismes conformes du disque :  $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z+a}{1-\bar{a}z}$ , où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $a \in D$ . Ce groupe étant de dimension finie, il n'est pas très dur rendre les suites minimisantes compactes. De plus on vérifie aisément que tout minimum  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $D$  est un minimum de  $A$  et dans ce cas vérifie

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ u_x, u_y &= 0, \quad |u_x|^2 = |u_y|^2. \\ u(\partial D) &= \gamma \end{aligned}$$

Il est alors classique de démontrer que la régularité de  $u$  est égale à la régularité de  $\gamma$ , si de plus  $\gamma$  n'est pas trop « tordu », alors on est assuré que  $u$  est une immersion (voir un plongement), on pourra consulter [49] et [54] pour plus de détails.

Un autre problème classique de géométrie est celui de l'isopérimétrie, la recherche d'une surface d'aire minimale délimitant un volume donné. Une version « à bord » de ce problème, plus connu sous le nom de problème des bulles de

<sup>3</sup>Il fut proposé par Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en 1760, mais porte le nom de Joseph Plateau (1801-1883).

savons, peut s'énoncer comme suit ; étant donnée une courbe fermée simple  $\mathbb{R}^3$ , on cherche  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui minimise

$$D(u) = \frac{1}{2} \int_D |u|^2 dx dy,$$

parmi l'ensemble des  $u$  tel que  $u(D) = 1$  et

$$V(u) = \frac{1}{3} \int_D u, u_x, u_y dx dy = 1.$$

En effet  $V(u)$  est l'intégrale du volume du cône infinitésimal de sommet 0 et s'appuyant sur  $u(D)$  en  $u$ . Ce problème jouit de la même invariance que le précédent, et les minima<sup>4</sup> (et plus généralement les points critiques) vérifient

$$\begin{aligned} u &= -2 \lambda u_x, u_y \\ u_x, u_y &= 0, |u_x|^2 = |u_y|^2, \\ u(D) &= 1 \end{aligned} \quad (E)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange. L'analyse des solutions de ce problème est beaucoup plus difficile que celle des applications harmoniques, car cette équation est critique dans le sens suivant : si  $u \in H^1(D)$ , l'espace naturel pour minimiser  $D$ , alors  $u_x, u_y \in L^1$  et la théorie elliptique standard ne donne aucune estimée. En effet il y a même un contre exemple classique à la régularité des solutions d'équations critiques :

$$u(z) = \ln(-\ln(|z|/2)) - \ln(-\ln(1/2)) \in H_0^1(D)$$

et vérifie

$$u = \lambda |u|^2.$$

Mais le terme de droite de (E) a une forme particulière, il s'agit d'un jacobien qui fait que cette équation va être sujette à un phénomène de compacité par compensation. Ce phénomène fut initialement découvert par Wente [53].

Lemme 2.1 (Wente 69). *Il existe une constante universelle  $C > 0$  tel que si  $a, b \in W^{1,2}(D)$  et  $u \in W_0^{1,1}(D)$  est une solution de l'équation suivante*

$$u = a_x b_y - a_y b_x,$$

alors

$$\|u\|_1 + \|u\|_2 \leq C \|a\|_2 \|b\|_2.$$

Puis ce phénomène fut exploré par de nombreux auteurs comme Coifman, Lions, Meyer et Semmes [11] ou Tartar [51], voir aussi [23] et [43] pour des exposés de revus. Finalement le problème des bulles de savons, sous des hypothèses raisonnables, admet au moins deux solutions régulières, voir [6], [48]. Toutefois

<sup>4</sup>Lorsqu'il existe car si la courbe est trop grande, il se peut qu'aucun  $u$  ne vérifient  $V(u) = 1$ .

beaucoup de choses restent encore à comprendre. Tout d'abord le comportement des suites de solutions, car l'équation étant critique même si on arrive à prouver la régularité de solutions, on a aucune estimée *a priori* et les suites de solutions n'ont aucune raison d'être compacte. Toutefois la communauté pense que la conjecture suivante est vraie :

Conjecture 2.1. *Soit  $(u_n)_n$  une suite bornée de  $H^1(D)$  solution de  $(E)$ , alors  $(u_n)_n$  est compacte.*

Une des difficultés principales pour contrôler les suites de solutions est que, contrairement aux équations scalaires,  $(E)$  est un système vectoriel et donc ne vérifient aucun principe du maximum. Par exemple, on ne sait même pas que les symétries du bord se propagent à l'intérieur, et la conjecture suivante, proposé par Brezis et Coron en 84 [6] est encore largement ouverte :

Conjecture 2.2. *Si  $\Omega$  est un cercle, alors il y a exactement deux solutions<sup>5</sup> de  $(E)$ .*

Le fait que le terme de droite de  $(E)$  soit un jacobien, en particulier qu'il puisse se réécrire sous forme divergence, n'est pas sans lien avec l'invariance conforme du problème. En effet comme le note notamment Hélein page 29 de [22], une version du théorème de Noether nous assure que l'invariance conforme donne nécessairement une loi de conservation (en fait 3, autant que la dimension du groupe). Donc le phénomène de compacité par compensation observé pour le problème des bulles de savon ne lui est pas propre, mais concerne l'ensemble des problèmes conformément invariants.

### 3 Problèmes conformément invariants et la conjecture d'Hildebrandt

Comme on vient de le voir l'invariance conforme semble être à l'origine du phénomène de compacité par compensation auquel est sujet l'équation des surfaces à courbure moyenne constante. Nous allons définir plus précisément ce que l'on entend par un problème conformément invariant. Dans cette section on se limite à la dimension 2 car, le groupe conforme étant plus gros, les équations sont bien plus simples. Toutefois ce concept est bien sûr valable en toute dimension.

Définition 3.1. *Soit  $\Omega$  une surface de Riemann<sup>6</sup> et  $N \subset \mathbb{R}^m$  une sous-variété. On dit qu'une fonctionnelle  $L$  est conformément invariante si*

$$L(u) = \int_{\Omega} l(u, \nabla u) dv$$

où  $l : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u \in W^{1,2}(\Omega, N)$ , et telle que

<sup>5</sup>La petite et la grande calotte sphérique bordant  $\Omega$ .

<sup>6</sup> L'ensemble des problèmes qui nous intéresse étant locaux, on pourra simplement penser à  $D$ .

- i) pour tout  $\mathcal{C} \in \text{Conf}(M)$  avec  $\deg(\mathcal{C}) = 1$ , on ait  $L(u \circ \mathcal{C}) = L(u)$ ,  
 ii) et il existe  $C > 0$  tel que

$$\frac{|p|^2}{C} \leq I(\cdot, p) \leq C|p|^2.$$

Voici quelques exemples classiques :

a)  $E(u) = \int_M |u|^2 dv$ .

Les points critiques sont les applications harmoniques, elles vérifient

$$\Delta u = A(u)(u_x, u_y),$$

où  $A$  est la seconde forme fondamentale de  $N$ .

b)  $M = D$ ,  $N = \mathbb{R}^3$  et soit  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose

$$E(u) = \int_D |u|^2 dz + \frac{1}{3} \int_D Q(u) \cdot (u_x, u_y) dz,$$

où  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avec  $\text{div}(Q) = H$ .

Les points critiques sont les surfaces à courbure moyenne prescrite égale à  $H$  ( $H$ -surfaces). Elles vérifient

$$\Delta u = 2H(u)u_x - u_y,$$

lorsque  $u$  est conforme.

c) Soit  $(N, g, J)$  une variété Kähler et  $E(u) = \int_M |u|^2$ .

Les points critiques sont les applications  $J$ -holomorphes, elles vérifient

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = J(u) \frac{\partial u}{\partial z},$$

où  $z = x + iy$  sont des coordonnées holomorphes.

Ces équations (et bien d'autres) partagent quelques caractéristiques, elles sont notamment critiques dans le sens où, comme pour l'équation des surfaces à courbure moyenne constante, on a

$$u \in C^1 \implies u \in C^2.$$

Comme expliqué dans la section 2, la régularité des solutions est déjà un problème difficile en soit. Pour les applications harmoniques cela a été démontré par Frédéric Hélein [23], pour les  $H$ -surfaces par Wente [53] dans le cas constant puis Hildebrandt [10] dans le cas général, enfin par Sikorav [47] pour les applications holomorphes. Hildebrandt a conjecturé que plus généralement tout point critique d'une fonctionnelle invariante conforme devait être régulier. En toute généralité,

on savait qu'une fois la solution continue alors elle était nécessairement régulière, d'après le résultat de Giusti-Miranda et Morrey voir Theorem 9.8 de [18]. Toutefois la continuité n'a été prouvée qu'en 2006 par Rivière. Nous détaillons ici un peu ce travail car il contient certains ingrédients de la preuve de notre résultat principal.

Tout d'abord, il fut noté par Gruter [21] que toutes les fonctionnelles invariantes conforme possédaient une structure commune. Puis en s'appuyant sur ce résultat Rivière montrera que tous les points critiques vérifiaient une équation elliptique avec un potentiel antisymétrique.

**Théorème 3.1** (Gruter 84 -Rivière 07). *Soit  $u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, N)$  un point critique d'une fonctionnelle conformément invariante, alors il existe  $\lambda \in L^2(\mathbb{D}, so(m))$  telle que*

$$-\Delta u = \lambda \cdot u \quad (*)$$

Par exemple l'équation de courbure moyenne prescrite

$$u = -2H(u)u_x - u_y$$

peut s'écrire sous la forme (\*) avec

$$\lambda = H(u) \begin{pmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ 0 & 0 & -u^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est très important de noter ici que contrairement au cas où  $H$  est constant, le terme de droite ne peut être mis sous forme divergence sans supposer que  $H$  est très régulier. En particulier la théorie de la compacité par compensation ne s'applique pas directement à cette équation.

### 3.1 Régularité des points critiques de fonctionnelles conformément invariantes

En fait dans son travail Rivière montre non seulement la continuité des points critiques des fonctionnelles invariantes conforme mais en fait de toutes les solutions d'équations de la forme (\*).

**Théorème 3.2** (Theorem I.1 [41]). *Soit  $u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, N)$  qui vérifie (\*), alors pour tout  $p > 2$  on a  $u \in W^{1,p}(\mathbb{D}, N)$ .*

*Idées de la preuve :*

Tout d'abord réécrire l'équation de sorte à faire apparaître un terme jacobien et pouvoir appliquer l'inégalité de Wente. Ici l'antisymétrie est cruciale. Il s'agit de s'inspirer des travaux de Karen Uhlenbeck sur l'existence de jauges de Coulomb [52], qui consistent dans notre cas à faire une décomposition de Hodge non-linéaire de  $\lambda$ . On pourra aussi consulter [45] pour une approche plus variationnelle du même résultat.



Théorème 3.3 (Theorem I.3 [41]). *Il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que si  $\epsilon < \epsilon_0$  alors il existe  $A \in L^\infty W^{1,2}(\mathbb{D}, GL_n)$  et  $B \in W^{1,2}(\mathbb{D}, M_n)$  tel que*

$$A - A^* = B$$

Dans ce cas, (\*) devient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A \cdot u) &= B \cdot u \\ \operatorname{curl}(A \cdot u) &= A \cdot u \end{aligned}$$

Ensuite, à l'aide de l'inégalité de Wente on obtient des estimées d'énergie, notamment sur la décroissance de  $\int_{B(0,r)} |u|^2 dz$ , plus connues sous le nom d'estimées de Morrey, enfin en appliquant un résultat classique de théorie du potentiel [1], on en déduit que  $u \in W^{1,p}(\mathbb{D}, N)$  et l'injection de Sobolev achève la preuve.

Il est à noter que le fait que l'on ait une estimée  $L^\infty$  sur  $A$  est crucial, car l'inégalité de Wente ne donne a priori que des estimées sur  $A \cdot u$ . Ici l'antisymétrie joue également un rôle crucial puisque  $so(n)$  est vu comme l'algèbre de Lie de  $SO(n)$  et c'est la compacité de ce dernier qui permet d'obtenir l'estimée  $L^\infty$  sur  $A$ . D'ailleurs le résultat devient faux si l'on suppose pas que  $so(n)$  est dans l'algèbre de Lie d'un groupe compact, comme on peut le voir dans la section 6 de Zhu [57].  $\square$

Comme expliqué dans l'introduction, d'une certaine manière c'est l'invariance conforme qui est à l'origine de la régularité, via l'existence de loi de conservation assurée par le théorème de Noether. Mais cette invariance est aussi à l'origine d'un phénomène encore plus trivial : ces équations sont également conformément invariante dans le sens où si  $u : \mathbb{D} \rightarrow N$  est une solution alors  $u \circ \gamma$  est également solution. En particulier elles sont sujettes à des phénomènes de concentration et donc de perte de compacité. Dans la section suivante nous allons développer une notion de compacité faible.

### 3.2 Compacité faible : Identité d'énergie

Ici nous commençons par donner une heuristique du phénomène de perte de compacité ou *bubbling* notamment mis en lumière par Sacks et Uhlenbeck dans [44] le travail fondateur sur les immersions minimales de sphères en 79. Soit  $u_n : \mathbb{D} \rightarrow N$  une suite de solutions d'un problème invariant conforme. On pourra penser aux applications harmoniques pour fixer les idées. Supposons que cette suite n'est pas compacte, alors  $\int_{\mathbb{D}} |u_n|^2 dz \rightarrow +\infty$ , sinon par théorie elliptique standard  $u_n$  converge dans  $C_{\text{loc}}^2$ . Toujours dans un but de clarté, à translation près, on suppose également que  $u_n(0) = u_n$ . On définit alors  $u_n : B(0, 1/\epsilon_n) \rightarrow N$ , par

$$u_n = u_n(\epsilon_n \cdot),$$

où  $\epsilon_n = \int_{\mathbb{D}} |u_n|^2 dz$ . Alors  $\int_{\mathbb{D}} |u_n|^2 dz = 1$  et donc  $u_n$  converge vers 0 dans  $C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ . De plus  $u_n$  vérifie la même équation, dans notre cas c'est une application harmonique, mais cette fois-ci définie sur tout le plan, on appelle une telle

solution une bulle<sup>7</sup>. Enfin si on suppose que la concentration n'a lieu que en 0, alors  $u_n \rightarrow u$  dans  $C_{loc}^2(D \setminus \{0\})$ , on sait même grâce un argument d'effacement de singularité que si  $u_n$  est borné alors  $u \in C^2(D)$ .

Pour résumer, on contrôle très bien le comportement de  $u_n$  loin de 0 mais aussi à l'échelle  $\rho_n$ . Une question naturelle est alors de comprendre ce qui se passe dans la région intermédiaire, le cou<sup>8</sup>, en particulier que se passe-t-il au niveau de l'énergie, est ce que toute l'énergie perdue par passage à la limite de  $u_n$  à  $u$  a été absorbée par la bulle ou en a-t-on perdue dans le cou, c'est à dire a-t-on

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\rho_n \rightarrow +\infty} \int_{L^2(B(0,1/R) \setminus B(0,R^{-1}))} u_n = 0 \quad ?$$

Dans ce cas on parle d'identité d'énergie car

$$\lim_{\rho_n \rightarrow +\infty} \int u_n = \int u + \dots$$

Bien sûr ce qui précède est une simple heuristique nous avons considéré le cas simple d'une bulle, alors qu'on aurait très bien pu en avoir plusieurs, même en 0, et nous avons également négligé les phénomènes de bord. Ces derniers ne nous intéresseront pas dans cette revue car la plus part des phénomènes étudiés sont purement locaux. Mais il s'agit d'une question très intéressante voir [9]. Voici une définition rigoureuse.

Définition 3.2 (Identité d'énergie). *On dit qu'une suite de solutions  $u^n \in W^{1,2}(D, N)$  vérifie une identité d'énergie s'il existe*

- $u \in W^{1,2}(D, N)$
- $a_1^n, \dots, a_k^n \in D$
- $\rho_1^n, \dots, \rho_k^n \in \mathbb{R}^+$
- $S_1, \dots, S_k$  bulles

tel que

$$u^n \rightarrow u \text{ dans } W_{loc}^{1,2}(D \setminus \{a_1, \dots, a_k\}),$$

$$u_i^n = u^n(a_i^n + \rho_i^n z) \text{ dans } W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^2 \setminus S_i)$$

et

$$\int u^n - \int u - \sum_{i=1}^k \int \frac{u_i^n - a_i^n}{\rho_i^n} = 0.$$

Revenons un instant à nos exemples. En fait pour chacun, on possède déjà une démonstration d'un tel phénomène.

Pour les application harmonique la première preuve est du à Parker [38] et la meilleure hypothèse connue avant notre travail est  $N$  de classe  $C^3$ , l'outil essentiel

<sup>7</sup>La terminologie, vient du fait que pour pour l'équation des surface à courbure moyenne constante, il s'agit tout bonnement de sphères rondes.

<sup>8</sup> car c'est cette région qui recolle la bulle à la solution limite.

est l'utilisation de la différentielle de Hopf. Pour le problème des  $H$ -surfaces, il y a une première preuve due à Brezis et Coron [5], voir aussi les travaux de Struwe [50], lorsque  $H$  est constant. Dans le cas général, le meilleur résultat connu était celui de Caldirolì et Musina [8] avec  $H \in C^1$  et décroissante à l'infini, ici la preuve repose principalement sur l'inégalité de Wentzell. Enfin pour les courbes  $J$ -holomorphes, la première identité d'énergie est due à Gromov [20] et la meilleure hypothèse connue était  $N$  est  $C^2$ , la preuve s'appuie essentiellement sur l'inégalité isopérimétrique. Il est à noter que dans ce dernier cas il ne s'agit pas seulement, d'un résultat local, on peut considérer des courbes  $J$ -holomorphes définies sur des surfaces dont la classe conforme n'est *a priori* pas contrôlée. Par contre dans le cas des applications harmoniques, il y a des contre-exemples à l'identité d'énergie lorsque la classe conforme dégénère, voir les travaux de Zhu [56], où d'ailleurs la perte d'énergie est quantifiée par un résidu.

Notre but initial, avec T. Rivière, fut de donner une preuve de ces différents résultats ne reposant que sur l'invariance conforme. Outre le fait de jeter une nouvelle lumière sur les problèmes conformément invariants, une meilleure compréhension du mécanisme de compacité par compensation pourrait nous permettre d'atteindre des hypothèses plus naturelles pour les exemples suscités. En effet il n'y a aucune raison de se restreindre aux courbures moyennes décroissant à l'infini par exemple. De plus une telle preuve pourrait potentiellement se généraliser aux dimensions supérieures par exemple, ce qui est sans espoir pour des outils tels que la différentielle de Hopf qui est un outil d'analyse complexe propre à la dimension 2.

Dans la section suivante nous proposons une identité d'énergie pour les solutions du système de type (\*).

## 4 Identité d'énergie pour un système linéaire elliptique avec un potentiel antisymétrique

Tout d'abord, il est à noter que les identités d'énergie sont habituellement caractéristiques des phénomènes non-linéaires, or ici on s'intéresse à un système linéaire, ce qui donne une certaine originalité au résultat. Ensuite, il est clair qu'on ne peut transposer directement les techniques issues de la régularité pour la raison suivante. Pour démontrer la régularité, on suppose toujours que l'on est sous un certain niveau d'énergie afin d'assurer l'existence de lois de conservations. Or lorsque l'on a un phénomène de concentration, nous sommes assuré d'être au dessus de ce niveau d'énergie<sup>9</sup>. Afin de démontrer notre résultat, il va falloir procéder à une analyse fine dans les coins, pour cela nous allons notamment utiliser un raffinement des espaces  $L^p$ , les espaces de Lorentz. Dont voici une définition, on trouvera un exposé plus détaillé chapitre 3 de [23] mais aussi section 1.4 de [19].

Définition 4.1. Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^k$ ,  $p \in (1, +\infty)$  et  $q \in [1, +\infty]$ . L'espace

<sup>9</sup> du moins celui de l' $L^p$ -régularité.

de Lorentz  $L^{p,q}(D)$  est l'ensemble des fonctions mesurables  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\|f\|_{p,q} = \left( \int_0^+ t t^{1/p} f(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty \quad \text{si } q < +\infty$$

ou

$$\|f\|_p = \sup_t t^{1/p} f(t) \quad \text{si } q = +\infty$$

où  $f$  est le réarrangement symétrique of  $f$ .

Remarque 4.1. La chose importante à retenir pour cet exposé est que l'on a  $L^{2,1} \subset L^2 \subset L^{2,\infty}$  qui partage évidemment la même invariance par changement d'échelle, que  $L^{2,1} \subset L^2$  et que  $L^{2,1}$  et  $L^{2,\infty}$  sont duaux.

On possède notamment une inégalité de Wente « améliorée ».

Lemme 4.1. Soit  $a, b \in W^{1,2}(D)$  et  $u \in W_0^{1,1}(D)$  une solution de

$$\Delta u = a_x b_y - a_y b_x,$$

alors

$$\|u\|_{2,1} \leq C \|a\|_2 \|b\|_2.$$

En fait cette inégalité contient la précédente, car contrairement à  $W^{1,2}$ ,  $W^{1,(2,1)}$  s'injecte dans  $L^\infty$ . Enfin cette inégalité est une conséquence du travail de Coifman, Lions, Meyer et Semmes qui ont montré que  $a_x b_y - a_y b_x \in H^1$ , l'espace de Hardy. Le lecteur trouvera tous les détails chapitre 3 de [23].

Une des principales difficultés de notre travail a été de généraliser ce genre d'inégalités à des anneaux dont la classe conforme dégénère. Ce qui n'est pas toujours vrai comme nous allons voir, ce qui explique le résultat partiel, mais optimal, suivant.

**Théorème 4.1** (Theorem 2 & Section 3.3 de [34]). *Les dérivées angulaires d'une suite de solutions d'un système linéaire avec un potentiel antisymétrique vérifient une identité d'énergie.*

*De plus il existe des suite dont la partie radiale du gradient ne vérifie pas d'identité d'énergie, dans ce cas la perte d'énergie est mesurée par un résidu.*

L'existence d'un résidu non nul provient du fait que les lois de conservations ne peuvent pas être globale, c'est à dire au niveau du cou on ne peut les étendre à l'intérieur du disque sinon le résidu serait trivial.

*Idées de la preuve :*

Soit  $u^n \in W^{1,2}(D, N)$  et  $v^n \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \text{so}(m))$  tels que

$$u^n = v^n + w^n \quad C$$

et

$$- \Delta u^n = v^n \cdot u^n$$

Étape 1 :  $\epsilon$ -Régularité

Comme conséquence du Théorème 3.3, on obtient un résultat d' $\epsilon$ -régularité, c'est à dire que sous un certain niveau d'énergie on contrôle uniformément l'application.

Lemme 4.2. *Il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $C_p > 0$  tel que  $\epsilon < \epsilon_0$  et  $u \in W^{1,2}(D, N)$  vérifie*

$$-\Delta u = \lambda \cdot u$$

alors

$$\|u\|_{L^p(B(0,1/2))} \leq C_p \|u\|_2.$$

Une des première conséquence de ce résultat est le phénomène de *Saut d'énergie*, les bulles sont contraintes d'avoir une énergie minimale.

Remarque 4.2. *Si  $\Omega$  est une bulle, i.e. vérifie*

$$-\Delta u = \lambda \cdot u \quad \text{on } \mathbb{R}^2$$

avec

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0$$

alors  $\Omega$  est triviale.

Étape 2 : Extraction des bulles (phénomène d'arbre de bulles)

Comme l'énergie ne peut se concentrer qu'au delà de  $\epsilon_0$  et que l'énergie globale est finie, il y a nécessairement un nombre fini de points de concentrations. Au niveau de ces points on choisit un premier rayon de concentration  $r^n \rightarrow 0$  de sorte à ne pas avoir trop d'énergie dans le cou (en fait exactement  $\epsilon_0/2$ ), on ramène le disque  $D(\cdot, r^n)$  sur le disque  $D(0, 1)$ , et on itère. Le processus s'arrête étant donné qu'à chaque étape on enlève un niveau quantifié d'énergie. Au final, Il existe

- $u^n \in W^{1,2}(D, N)$  solution de  $-\Delta u = \lambda \cdot u$  avec  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \epsilon_n$
- $a_1^n, \dots, a_k^n \in D$
- $r_1^n, \dots, r_k^n \in \mathbb{R}^+$
- $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  bulles

tels que

$$u^n = u \quad \text{in } W_{\text{loc}}^{1,2}(D \setminus \{a_1, \dots, a_k\}),$$

$$u_i^n = u^n(a_i^n + r_i^n z) \quad \text{in } W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^2 \setminus S_i),$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B(a_i^n, R)} |\nabla u_i^n|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Étape 3 : Estimée faible, i.e. estimée  $L^2$ .

Le but de cette étape est de montrer qu'il n'y a pas d'énergie « faible », c'est à dire

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B(0,r)} |u_n|^2 = 0.$$

Ici, nous allons tricher un peu en se plaçant dans le cadre un peu moins général des points critiques de fonctionnelles invariantes conformes. En effet dans ce cas est lui même contrôlé par  $u$  et dans ce cas on peut faire un *boot-strap* sur l' $\alpha$ -régularité pour obtenir l'estimée suivante

Lemme 4.3. Il existe  $\alpha > 0$  et  $C > 0$  tel que  $\int_{B(0,r)} |u|^2 \leq C \int_{B(0,2r)} |u|^2$  et  $u \in W^{1,2}(D, N)$  vérifie

$$-\Delta u = \lambda u$$

alors

$$\int_{B(0,1/2)} |u|^2 \leq C \int_{B(0,2)} |u|^2.$$

En particulier dans les trous on a

$$\int_{B(0,2|z|)} |u|^2 \leq \frac{C}{|z|} \int_{B(0,|z|)} |u|^2 dz.$$

Dans le cas général on contourne cette difficulté à l'aide de la théorie de l'interpolation. D'après la remarque 4.1, il suffit démontrer que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{r < |z| < 1/r} \int_{B(0,|z|)} |u|^2 dz = 0.$$

Ce qu'on observe assez facilement, sinon on pourrait trouver par éclatement et effacement de singularité en 0 une solution non triviale d'énergie inférieure à  $\alpha/2$ , ce qui contredirait la remarque 4.2.

Étape 4 : Estimée forte, i.e. estimée  $L^{2,1}$

Pour obtenir l'absence d'énergie dans les trous, compte tenu de l'estimée précédente et de la dualité des espaces de Lorentz, il suffit de montrer que

$$u_n \in L^{2,1} = O(1).$$

Pour cela on souhaite utiliser le lemme de Wente généralisé. En effet il se généralise aux anneaux, indépendamment de leur classe conforme.

Lemme 4.4 (Section 2 of [34]). Soit  $0 < \alpha < 1/4$ ,  $a, b \in W^{1,2}(D \setminus B(0, \alpha))$  et  $W_0^{1,1}(D)$  une solution de

$$-\Delta w = a_x b_y - a_y b_x,$$

alors

$$\int_{B(0,1/2)} |w|^2 \leq C (\|a\|_2 \|b\|_2 + \alpha^2),$$

Toutefois, pour appliquer un tel lemme il faut une condition de Dirichlet. Dans ce but on soustrait le prolongement harmonique de  $u$ , puis on l'estime séparément. Ce qui ne pose pas de problème outre mesure dans le cas du disque, devient très problématique dans le cas de l'anneau car la fonction  $r^{-1} \log(r)$  est harmonique et dans  $W^{1,2}$  ! En fait la norme  $L^{2,1}$  du logarithme ne peut être estimé par la norme  $L^2$ , indépendamment de la classe conforme, puisque :

$$\frac{\log_{L^{2,1}(B(0,1/2), B(0,2))}}{\log_{L^2(B(0,1), B(0,2))}} \sim \overline{\log(1/r)}.$$

Cependant en considérant la décomposition de Fourier d'une fonction harmonique, à l'exception du terme logarithmique tous les autres sont des puissances et dans ce cas une estimée de la norme  $L^{2,1}$  par la norme  $L^2$  devient possible, ce qui permet notamment d'estimer les dérivées angulaires :

Lemme 4.5 (Inégalité de Wente sur des anneaux qui dégènèrent). *Soit  $0 < \epsilon < 1/4$ ,  $a, b \in W^{1,2}(D \setminus B(0, \epsilon))$  et  $u \in W^{1,1}(D)$  une solution de*

$$= a_x b_y - a_y b_x,$$

alors

$$\frac{r^{-1}}{L^{2,1}(B(0,1/2), B(0,2))} \leq C(\|a\|_2 + \|b\|_2 + \epsilon),$$

avec  $C$  indépendante de  $\epsilon$ .

Au final on obtient l'estimée suivante

$$\frac{u^n}{r} \in L^{2,1} = O(1),$$

Ce qui nous donne l'estimée souhaité et permet de conclure pour la première partie du théorème. La seconde partie s'obtient justement en recollant deux solutions à l'aide d'un logarithme dans un cou tout en préservant l'anti-symétrie de  $u$ , voir section 3.3 de [34].  $\square$

Ce résultat purement analytique a trouvé bon nombre d'applications à des problème plus géométrique permettant notamment une quantification totale de l'énergie. L'objet de la section suivante est de présenter un certain nombre d'entre elles.

## 5 Applications

### 5.1 Retour au problème conformément invariant en dimension 2

Comme on l'a vu section 3, si  $u$  est un point critique d'une fonctionnelle invariant conforme alors  $u$  vérifie

$$-\Delta u = \frac{1}{2} |u|^2 u$$

avec antisymétrique. Mais l'invariance conforme force également le terme de droite à être orthogonal à  $u$ , voir Theorem I.2 [43] dans le sens suivant :

$$\int_{B_r} u \, dx \, dy \text{ est orthogonal à } u_x \text{ et } u_y$$

Par conséquence,  $u$  vérifie une identité de Pohožaev, [40].

$$\int_{B_r} \frac{u^2}{r} \, dz = \int_{B_r} \frac{u^2}{r} \, dz$$

Pour obtenir une telle identité il suffit de multiplier  $u$  par  $xu_x + yu_y$  et d'intégrer convenablement par partie. En particulier le contrôle de l'énergie angulaire obtenu dans le théorème 4.1 se transmet immédiatement à toute l'énergie.

**Théorème 5.1** (Theorem 3 [34]). *En dimension 2, toute suite de points critiques d'une fonctionnelle conformément invariante vérifie une identité d'énergie.*

Outre la grande généralité de ce résultat, il permet d'améliorer, voir d'optimiser, un certain nombre de résultats existants. En effet la preuve requiert uniquement  $L^2$ , ce qui est l'hypothèse minimale pour donner un sens aux équations. On a notamment pu donner des versions optimales des résultats existants pour nos exemples :

- a) Les applications harmoniques :
- b)  $\mathcal{E}(u, \cdot)$ , on a besoin seulement de  $A \in C^0$ , i.e  $N \in C^2$
- c) Les surfaces à courbure moyenne prescrite :  $H(u) = u$ , n a besoin seulement de  $H \in C^0$ .
- d) Les courbes  $J$ -holomorphe : On a besoin seulement de  $J \in C^0$ , i.e  $N \in C^1$ , (et sans contrôler la class conforme!)

Au delà de ces améliorations, la preuve ne reposant que sur l'invariance conforme elle se généralise aisément à des problèmes d'ordres supérieurs et de plus grande dimension comme nous allons le voir dans les sections suivantes.

## 5.2 Applications biharmoniques dimension 4

En dimension 4, le pendant des applications harmoniques en dimension 2 sont les applications biharmoniques, dimension critique. Il existe toutes fois (au moins) deux notions d'applications biharmoniques. Supposons que la variété d'arrivée  $N$  soit plongée isométriquement dans  $\mathbb{R}^m$ . On peut alors soit considérer l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{4} \int_{B_1} |u|^2 \, dx,$$

dont l'équation d'Euler Lagrange est

$$\Delta^2 u = (B(u)(u, u)) + 2 \cdot u, \quad P(u) = (P(u)), \quad u,$$



où  $P$  et  $B$  sont respectivement la projection orthogonale sur  $T_u N$  et la seconde forme fondamentale de  $N$ . Dans ce cas on parle d'application biharmonique extrinsèque. Soit on considère l'énergie

$$I(u) = \frac{1}{4} \int_{B_1} |(u)^T|^2 dx,$$

dont l'équation d'Euler Lagrange est

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= (B(u)(u, u)) + 2 \cdot u, P(u) - (P(u)), u \\ &+ P(u)(B(u)(u, u)) - B(u)(u, u) \\ &+ 2B(u)(u, u)B(u)(u, P(u)), \end{aligned}$$

où  $P$  et  $B$  sont respectivement la projection orthogonale sur  $T_u N$  et la seconde forme fondamentale de  $N$ . Nous avons obtenue le résultat de quantification suivant

**Théorème 5.2 (Theorem 0.1 [33]).** *Les suites d'applications biharmoniques (intrinsèques ou extrinsèques) vérifient une identité d'énergie.*

Ce résultat était déjà partiellement connu pour les applications intrinsèques, [26]. La méthode s'adaptant bien aux perturbations, on peut en déduire les conséquences suivante sur le comportement asymptotique du flot biharmonique. Par exemple, une solution faible du flot biharmonique extrinsèque est donnée par  $u \in W^{2,2}([0, +\infty[ \times B_1, N)$  vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{u}{t} + \Delta^2 u &= (B(u)(u, u)) + 2 \cdot u, P(u) \\ &- (P(u)), u \text{ on } [0, +\infty[ \times B_1 \\ u &= u_0 \text{ on } \{0\} \times B_1 \end{aligned} \tag{3}$$

où  $u_0 \in W^{2,2}(B_1, N)$ . En particulier toute solution vérifie

$$2 \int_0^T \int_{B_1} \frac{u}{t} dx dt + \int_{B_1} |u|^2 dx = \int_{B_1} |u_0|^2 dx \text{ for all } T > 0.$$

**Corollaire 5.1 (Corollary 0.1 [33]).** *Soit  $N$  une sous-variété  $C^3$  de  $\mathbb{R}^k$ ,  $u_0 \in W^{2,1}(B_1, N)$  et  $u \in W^{2,2}([0, +\infty[ \times B_1, N)$  une solution global de (3). Alors il existe une suite de réel  $t_n \rightarrow +\infty$ , une application biharmonique  $u \in W^{2,1}(B_1, N)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $a^1, \dots, a^l$  des applications biharmonique de  $\mathbb{R}^4$  dans  $N$  et  $a_n^1, \dots, a_n^l$  une famille de points de  $B_1$  convergeant, tels que*

$$u(t_n, \cdot) - u \text{ on } W_{loc}^{2,p}(B_1 - \{a^1, \dots, a^l\}) \text{ for all } p > 1$$

et

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(t_n, \cdot) - u &= - \sum_{i=1}^l \frac{1}{t_n} \delta_{a_n^i} \text{ in } L^2_{loc}(B_1) \\ &+ \sum_{i=1}^l u(t_n, \cdot) - u = - \sum_{i=1}^l \frac{1}{t_n} \delta_{a_n^i} \text{ in } L^4_{loc}(B_1) = 0, \end{aligned}$$

où  $i_n = i(a_n^i + i_n \cdot)$ .

Une autre question naturelle est de savoir si autour des points critiques de petites énergies la fonctionnelle est convexe (voir [12] et [30] pour le cas des applications harmoniques).

**Théorème 5.3** (Theorem 1 [30]). *Il existe  $\epsilon_0 > 0$ , dépendant seulement de  $N$ , tel que si  $u, v \in W^{2,2}(B_1, N)$  sont telles que  $u = v$  et  $u = v$  sur  $B_1$ ,  $E(u) = \epsilon_0$  et  $u$  est faiblement biharmoniques (extrinsèque), alors*

$$\frac{1}{2} \int_{B_1} |v - u|^2 dx \leq \int_{B_1} |v|^2 dx - \int_{B_1} |u|^2 dx.$$

L'idée de la preuve est de remplacer les estimés de Hardy de Lamm Lin [29], par l'épsilon régularité notion plus robuste. Ce résultat était déjà partiellement démontré par Changyou Wang [25] dans le cas des applications biharmoniques extrinsèques. Toutefois dans notre travail [30] nous avons bonnes espoir d'étendre le résultat au applications biharmonique intrinsèque et par la suite de pouvoir la notion de width obtenu par Colding et Minicozzi via les surfaces minimales dans [13] aux variétés de dimension 4.

### 5.3 Les surfaces de Willmore

Les surfaces de Willmore sont les points critiques de la fonctionnelle suivante

$$W(\gamma) = \int_{\gamma} |H|^2 dv(\gamma)$$

où  $\gamma : \mathbb{R}^3$  est une immersion et  $H$  est la courbure moyenne. Cette fonctionnelle intervient de manière assez naturelle en physique, voir la mass de Hawking, ou même en biologie, voir l'énergie de Helfrich [24]. D'un point de vue purement mathématique elle a été introduite par Blaschke [4] qui souhaitait généraliser la notion de surfaces minimales dans un cadre invariant conforme. On peut aussi la considérer comme une bonne manière de mesurer la courbure globale d'une surface. Et donc il semble tout naturel d'en chercher les minima comme les meilleurs représentants dans  $\mathbb{R}^m$  d'une surface topologique fixé. Une très bonne introduction au sujet est fournit par Willmore lui-même dans [55], sinon on pourra aussi consulter l'article de Neves et Marques [37] où il est montré que le minimum pour les surface de genre 1 dans  $\mathbb{R}^3$  est atteint par le Tore de Clifford<sup>10</sup>. En genre plus grand et en dimension plus grande l'ensemble le problème reste largement ouvert.

L'équation d'Euler-Lagrange associée à cette fonctionnelle

$$\Delta_g H + 2H(H^2 - K) = 0,$$

où  $K$  est la courbure de Gauss. En un certain sens cette équation est mal posée puisque d'une part le laplacien dépend de la métrique qui elle même dépend de

<sup>10</sup>Plus exactement par une projection stéréographique du tore de Clifford.

l'immersion, mais surtout le terme cubique en  $H$  n'est même pas dans  $L^1$  et on ne peut entrevoir aucune estimée a priori.

Toutefois la caractéristique principale de cette fonctionnelle est d'être invariante par transformation conforme. En particulier le théorème de Noether, voir [28], nous assure de l'existence de lois de conservation associées à chaque transformation<sup>11</sup>, voir [2]. Contrairement aux fonctionnelles conformément invariantes, ici il s'agit d'une invariance au but, et pas à la source, ce qui donne des lois de conservation globales et non-plus locales.

En particulier L'invariance par translation nous assure que  $\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , une immersion conforme, est Willmore si et seulement si ( $n$  est la normale)

$$\operatorname{div}(2Hn - 3Hn + Hn) = 0.$$

Puis en utilisant les rotations et les dilations on trouve deux nouvelles lois de conservation qui donnent deux quantité  $R$  et  $S$  vérifiant un système elliptique dont le membre de droite est composé de jacobien !

$$\begin{aligned} S &= -n \cdot R \\ R &= n \cdot R + S \cdot n \\ &= \frac{1}{2}(S + R). \end{aligned}$$

$R$  et  $S$  sont alors sujets à un des phénomène de compensation que l'on peut remonter jusqu'à via l'équation

$$= R + S.$$

En s'appuyant notamment sur le lemme fondamental de [34] mais aussi une étude très fine du facteur conforme Bernard et Rivière ont démontré que quitte à contrôler la classe conforme d'une suite d'immersion d'énergie de Willmore borné, alors celle-ci vérifie une identité d'énergie

**Théorème 5.4** (Theorem I.2 [3]). *Soit  $\gamma_n : (D, c_n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  une suite d'immersion conforme d'énergie borné et de classe conforme  $c_n$  bornée alors  $W(\gamma_n)$  vérifie une identité d'énergie.*

Naturellement se pose la question de savoir si on peut se passer de l'hypothèse sur la classe conforme? En effet dans ce cas l'analyse ne peut plus se ramener à un problème local puisque se forme des *collars*, de longs et fins cylindres conformément équivalent à des anneaux qui dégénèrent. Ces collars étant bordés par des surfaces topologiquement non triviales, voir figure 1, lors de l'intégration des lois de conservations des résidus apparaissent et donc compliquent l'analyse du problème. Même dans le cas relativement simple des applications harmoniques, ces résidus ne sont *a priori* pas contrôlables et peuvent occasionner des pertes d'énergie arbitraires [56].

---

<sup>11</sup>Ces lois de conservations ont été initialement découverte par Rivière [42] par un calcul direct.

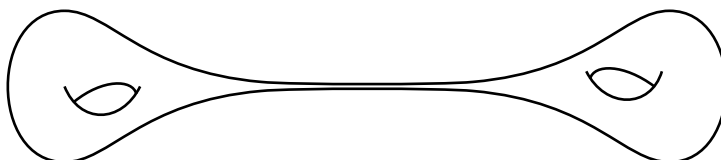


FIGURE 1 : Surface de genre 2 dont la classe conforme dégénère, avec formation d'un *collar*.

Avant même de commencer une telle analyse pour les suites de Willmore, il faut déjà comprendre plus généralement comment se comportent les suites d'immersions d'énergie de Willmore bornée mais dont la classe conforme dégénère. Tout particulièrement le comportement du facteur conforme :  $h_n$  tel que  $|h_n| = e^{-\lambda_n}$ , qui vérifie

$$h_n \Delta h_n = e^{2\lambda_n} K_n + 1.$$

Ici on se place en genre supérieur ou égale à 2,  $h_n$  désigne l'unique métrique de courbure constante égale à -1 dans la classe conforme  $c_n$ . Le problème du genre 1 se traite de manière analogue.

D'où l'on déduit que

$$h_n = G_n + F_n$$

avec  $F_n$  borné dans  $L^1$  et  $G_n$  la fonction de Green du laplacien  $\Delta_{h_n}$ . Donc par interpolation, le meilleur contrôle que l'on puisse espérer sur  $h_n$  est limité par le contrôle de  $G_n$ .

En fait  $G_n$  dégénère quand la classe conforme dégénère. En effet heuristiquement

$$G(x, y) = \sum_{i>0} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{\lambda_i},$$

où les  $\varphi_i$  et les  $\lambda_i$  sont respectivement les fonctions propres et valeurs propres du laplacien. Or lorsque notre suite de surface dégénère comme sur la figure 1, la limite n'est pas connexe (ici deux tores) et donc  $\lambda_1 \rightarrow 0$ ,  $G$  explose. Le comportement asymptotique de  $G$  lorsque la classe conforme dégénère a été très étudié, compte tenu notamment de son lien avec l'arithmétique, voir [7]. Par contre à notre connaissance, rien de précis n'était connu sur  $G$ . Bien sûr aucune estimation au delà de  $L^2$  ne peut être espérée en raison de la singularité en  $1/r$ . Toutefois en collaboration avec T. Rivière nous avons démontré une borne  $L^2$ -faible, ce qui est contenu de la remarque précédente ce qu'on peut espérer de mieux.

**Théorème 5.5** (Theorem 0.1 [35]). *Soit  $(\Sigma, c_n)$  une suite de surface de Riemann, alors, dans un « bon atlas »,  $G_n \in L^2$  est uniformément borné indépendamment de la classe conforme.*

Une fois la classe conforme contrôlée, On peut commencer l'analyse dans les collars. Il est très important de noter, que contrairement aux cous, les *collars* ne sont pas bordé par des disques et donc l'intégration des lois de conservations nécessite des résidus. Comme l'équation de Willmore est d'ordre 4 ou encore un système couplé d'ordre 2, il était assez naturel de s'attendre à ce que la perte d'énergie dans les *collars* soit mesurées par deux résidus, contrairement au cas des application harmoniques où il y en a un seul. En fait comme le décrit le théorème suivant un seul résidu suffit. Il est fort probable que la condition soit également nécessaire, mais pour l'instant nous ne disposons d'aucune construction explicite de surfaces de Willmore d'énergie borné et dont la classe conforme dégénère.

**Théorème 5.6 (Theorem 0.1 [36]).** *Soit  $\gamma_n : (c_n, d_n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  une suite de surface de Willmore d'énergie borné et telle pour toute suite de courbes  $\gamma_n$ ,*

$$\lim_n \frac{1}{|\gamma_n|} \int_{\gamma_n} (2H_n - 3H_n \nu_n + H_n d_n) = 0$$

*où  $\nu_n$  est une normale à  $\gamma_n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Alors  $W(\gamma_n)$  vérifie une identité d'énergie.*

### 5.4 Applications Harmoniques à bord libres et applications 1/2-harmoniques

Un autre domaine très actif de l'analyse où ces techniques s'applique est celui des EDPs elliptiques non-locale. Nous présentons ici le cas des applications 1/2-harmoniques, voir [46] pour des opérateurs plus généraux. Le cas des applications 1/2-harmoniques est particulièrement intéressant puisqu'ils sont reliés aux surfaces minimales à bord libre et au problème de métrique optimale pour la première valeur propre de L'opérateur Dirichlet-To-Neumann, sujet également en plein essors voir [17] and [39].

Soit  $\Omega$  une surface à bord et  $N$  une sous-variété à bord de  $\mathbb{R}^m$ . Les points critiques de l'énergie de Dirichlet sur l'ensemble des applications s'accrochant au bord, i.e.

$$\{u \in W^{1,2}(\Omega, N) \mid u|_{\partial\Omega} \in N\}$$

sont appelés applications harmoniques à bord libre, c'est à dire qu'elle sont harmoniques à l'intérieur de  $\Omega$  et vérifient au bord de

$$u \cdot \nu_u \in N,$$

où  $\nu_u$  est la normale sortante à  $\Omega$  en  $u$ .

Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{D}$ , on parle aussi d'application 1/2-harmoniques de  $S^1$  dans  $N$ , i.e.

$${}^{1/2}u \cdot \nu_u \in N,$$

où  ${}^{1/2}u = |\dot{u}|$ .

Un point de vue intrinsèque a été développé pour l'étude des applications 1/2-harmonique par Da Lio et Rivière [16], il retrouve comme dans le cas local, la régularité, l'épsilon-régularité et même la quantification dans le cas des

application à valeurs dans la sphère [14]. En collaboration avec Romain Petrides nous avons généralisé ce dernier résultat aux harmoniques à bord libre. Notre argument consiste à étendre l'application au delà du bord libre quitte à perdre le fait d'être harmonique mais en préservant la structure antisymétrique du type de (\*).

**Théorème 5.7 (Theorem 1 [31]).** *Soit  $(M, g)$  une surface de Riemann et  $u_m : (M, g) \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$  une suite bornée d'applications harmoniques à bord libre. Alors, Il existe une application harmonique à bord libre  $u : M \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$  et*

- $\{a^1, \dots, a^l\}$  une famille  $1/2$ -harmoniques de  $\mathbb{R} \rightarrow S^n$ ,
  - $\{a_m^1, \dots, a_m^l\}$  une famille de points convergeant sur  $\{a^1, \dots, a^l\}$ ,
  - $\{\epsilon_m^1, \dots, \epsilon_m^l\}$  une famille de nombres positifs, tels que,
- $$u_m - u \text{ in } C_{\text{loc}}(M \setminus \{a^1, \dots, a^l\}),$$

et

$$R_m = \|u_m - u\| \rightarrow 0,$$

avec

$$R_m = \|u_m - u\| = \sum_{i=1}^l \epsilon_m^i \frac{\|a_m^i - a^i\|}{\epsilon_m^i}.$$

Le cas d'une variété quelconque pour les  $1/2$ -harmoniques a été aussi traité en collaboration avec Da Lio, et Rivière.

**Théorème 5.8 (Theorem 1.2 [15]).** *Soit  $u_n \in H^{1/2}(\mathbb{R}, N)$  une suite d'applications  $1/2$ -harmoniques telles que  $u_n \rightharpoonup_{H^{1/2}} C$ . Alors,*

1. *Il existe  $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}, N)$  une application  $1/2$ -harmonique et un ensemble de points  $\{a_1, \dots, a_l\}$ , tels qu'à extraction près*

$$u_n - u \text{ in } W_{\text{loc}}^{1/2,p}(\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}), \quad p \geq 2$$

2. *Il existe  $\{v_i\} \subset H^{1/2}(\mathbb{R})$  des applications  $1/2$ -harmoniques, telles que, à extraction près,*

$$\|v_i\|^{1/4} \|u_n - u\| = \sum_i \|v_i\|_{L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

Ce résultat a été démontré indépendamment par Jost, Liu et Zhu [27] qui ont généralisé la technique de prolongement employée avec Romain Petrides à des variétés non nécessairement symétrique.

L'intérêt de notre preuve outre le caractère complètement intrinsèque, est une version 1 dimensionnel et non locale de l'identité de Pohožaev. Ici ce sont les parties paire et impaire de la fonction qui jouent le rôle de partie radiale et angulaire.

Théorème 5.9 (Theorem 1.3 [15]). Soit  $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  tel que

$$\frac{du}{dx} \cdot (-)^{1/2} u = 0 \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}$$

vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} |u - u_0| dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{dx}(x) \cdot dx < +\infty.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} u^+(x) dx^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{2xt}{(x^2 + t^2)^2} u^-(x) dx^2,$$

où  $u^+$  et  $u^-$  sont respectivement la partie symétrique et antisymétrique de  $u$ .

Théorème 5.10 (Theorem 1.4 [15]). Soit  $u \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^m)$  vérifiant

$$\frac{du}{d} \cdot (-)^{1/2} u = 0 \quad \text{p.p. sur } S^1$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} u(\theta) \cos \theta d\theta^2 = \int_0^{2\pi} u(\theta) \sin \theta d\theta^2.$$

Enfin dans un travail en cours de rédaction, nous venons de démontrer avec Romain Petrides la convexité de la fonctionnelle d'énergie autour des applications harmoniques à bords libres de petites énergies.

Théorème 5.11 (Theorem 1 [32]). Soit  $N$  une sous-variété compacte de  $\mathbb{R}^n$  et  $M$  une sous-variété de  $N$ . Alors, il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que si  $u, v \in W^{1,2}(D_+, N)$  avec  $u = v$  sur  $\partial D^+ \cap D$ , pour presque tout  $x \in \partial D^+ \cap D$ ,  $v(x) \in M$  et  $u(x) \perp M$ ,  $E(u) < \epsilon_0$  et  $u$  est faiblement harmonique rencontrant  $M$  orthogonalement, alors on a

$$\frac{1}{2} \int_{D_+} |v - u|^2 = \int_{D_+} |v|^2 - \int_{D_+} |u|^2. \quad (4)$$

## References

- [1] David R. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. 42 (1975), no. 4, 765–778.
- [2] Yann Bernard, *Noether's theorem and the Willmore functional*, Adv. Calc. Var. 9 (2016), no. 3, 217–234.
- [3] Yann Bernard and Tristan Rivière, *Energy quantization for Willmore surfaces and applications*, Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 1, 87–136.
- [4] Wilhelm Blaschke, *Topologische Fragen der Differentialgeometrie X. Kurvenscharen im Raum*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 7 (1929), no. 1, 37–45.

- [5] H. Brezis and J.-M. Coron, *Convergence of solutions of  $H$ -systems or how to blow bubbles*, Arch. Rational Mech. Anal. 89 (1985), no. 1, 21–56.
- [6] Haïm Brezis and Jean-Michel Coron, *Multiple solutions of  $H$ -systems and Rellich’s conjecture*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), no. 2, 149–187.
- [7] Peter Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010, Reprint of the 1992 edition.
- [8] Paolo Caldiroli and Roberta Musina,  *$H$ -bubbles in a perturbative setting: the finite-dimensional reduction method*, Duke Math. J. 122 (2004), no. 3, 457–484.
- [9] Qun Chen, Jürgen Jost, Guofang Wang, and Miaomiao Zhu, *The boundary value problem for Dirac-harmonic maps*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 15 (2013), no. 3, 997–1031.
- [10] S. S. Chern and Wen Tsün Wu (eds.), *Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations. Vol. 1, 2, 3*, Science Press, Beijing; Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1982, Held in Beijing, August 18–September 21, 1980.
- [11] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, and S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl. (9) 72 (1993), no. 3, 247–286.
- [12] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II, *Width and finite extinction time of Ricci flow*, Geom. Topol. 12 (2008), no. 5, 2537–2586.
- [13] ———, *Width and finite extinction time of Ricci flow*, Geom. Topol. 12 (2008), no. 5, 2537–2586.
- [14] Francesca Da Lio, *Compactness and bubble analysis for  $1/2$ -harmonic maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 32 (2015), no. 1, 201–224.
- [15] Francesca Da Lio, Paul Laurain, and Tristan Rivière, *A Pohozaev-type formula and quantization of horizontal half-harmonic maps*, arXiv:1607.05504 (2016).
- [16] Francesca Da Lio and Tristan Rivière, *Sub-criticality of non-local Schrödinger systems with antisymmetric potentials and applications to half-harmonic maps*, Adv. Math. 227 (2011), no. 3, 1300–1348.
- [17] Ailana Fraser and Richard Schoen, *Minimal surfaces and eigenvalue problems*, Geometric analysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations, Contemp. Math., vol. 599, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 105–121.



- [18] Mariano Giaquinta and Luca Martinazzi, *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs*, second ed., Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie), vol. 11, Edizioni della Normale, Pisa, 2012.
- [19] Loukas Grafakos, *Classical Fourier analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2014.
- [20] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), no. 2, 307–347.
- [21] Michael Grüter, *Conformally invariant variational integrals and the removability of isolated singularities*, Manuscripta Math. 47 (1984), no. 1-3, 85–104.
- [22] Frédéric Hélein, *Constant mean curvature surfaces, harmonic maps and integrable systems*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, Notes taken by Roger Moser.
- [23] ———, *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, second ed., Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 150, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, Translated from the 1996 French original, With a foreword by James Eells.
- [24] W. Helfrich, *Elastic properties of lipid bilayers: theory and possible experiments*, Zeitschrift für Naturforschung. Teil C: Biochemie, Biophysik, Biologie, Virologie 28(11), 693 (1973).
- [25] Jay Hineman, Tao Huang, and Chang-You Wang, *Regularity and uniqueness of a class of biharmonic map heat flows*, Calc. Var. Partial Differential Equations 50 (2014), no. 3-4, 491–524.
- [26] Peter Hornung and Roger Moser, *Energy identity for intrinsically biharmonic maps in four dimensions*, Anal. PDE 5 (2012), no. 1, 61–80.
- [27] Jürgen Jost, Lei Liu, and Miaomiao Zhu, *The qualitative behavior at the free boundary for approximate harmonic maps from surfaces*, MIS-Preprint 26/2016 (2016).
- [28] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *The Noether theorems*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, New York, 2011, Invariance and conservation laws in the twentieth century, Translated, revised and augmented from the 2006 French edition by Bertram E. Schwarzbach.
- [29] Tobias Lamm and Longzhi Lin, *Estimates for the energy density of critical points of a class of conformally invariant variational problems*, Adv. Calc. Var. 6 (2013), no. 4, 391–413.

- [30] Paul Laurain and Longzhi Lin, *Convexity of the biharmonic functionals and applications*, In preparation (2017).
- [31] Paul Laurain and Romain Petrides, *Regularity and quantification for harmonic maps with free boundary*, Accepté à Advances in Calculus of Variations (2015).
- [32] ———, *Convexity of the energy around free-boundary harmonic maps and applications*, In preparation (2017).
- [33] Paul Laurain and Tristan Rivière, *Energy quantization for biharmonic maps*, Adv. Calc. Var. 6 (2013), no. 2, 191–216.
- [34] ———, *Angular energy quantization for linear elliptic systems with anti-symmetric potentials and applications*, Anal. PDE 7 (2014), no. 1, 1–41.
- [35] ———, *Optimal estimate for the gradient of Green functions on degenerating surfaces and applications*, Accepté à CAG (2014).
- [36] ———, *Energy quantization of Willmore surfaces at the boundary of the moduli space*, arXiv:1606.08004, 2016.
- [37] Fernando C. Marques and André Neves, *The Willmore conjecture*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 116 (2014), no. 4, 201–222.
- [38] Thomas H. Parker, *Bubble tree convergence for harmonic maps*, J. Differential Geom. 44 (1996), no. 3, 595–633.
- [39] Romain Petrides, *Maximizing Steklov eigenvalues on surfaces*, soumis (2015).
- [40] S. I. Pohožaev, *On the eigenfunctions of the equation  $\Delta u + f(u) = 0$* , Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 36–39.
- [41] Tristan Rivière, *Conservation laws for conformally invariant variational problems*, Invent. Math. 168 (2007), no. 1, 1–22.
- [42] ———, *Analysis aspects of Willmore surfaces*, Invent. Math. 174 (2008), no. 1, 1–45.
- [43] ———, *Conformally invariant variational problems*, <https://people.math.ethz.ch/~riviere/papers/conformal-course.pdf>, 2012.
- [44] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. (2) 113 (1981), no. 1, 1–24.
- [45] Armin Schikorra, *A remark on gauge transformations and the moving frame method*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 27 (2010), no. 2, 503–515.
- [46] ———,  *$\epsilon$ -regularity for systems involving non-local, antisymmetric operators*, Calc. Var. Partial Differential Equations 54 (2015), no. 4, 3531–3570.

- [47] Jean-Claude Sikorav, *Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds*, Holomorphic curves in symplectic geometry, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 165–189.
- [48] Michael Struwe, *Large  $H$ -surfaces via the mountain-pass-lemma*, Math. Ann. 270 (1985), no. 3, 441–459.
- [49] ———, *Plateau’s problem and the calculus of variations*, Mathematical Notes, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.
- [50] ———, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, fourth ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [51] Luc Tartar, *Remarks on oscillations and Stokes’ equation*, Macroscopic modelling of turbulent flows (Nice, 1984), Lecture Notes in Phys., vol. 230, Springer, Berlin, 1985, pp. 24–31.
- [52] Karen K. Uhlenbeck, *Connections with  $L^p$  bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. 83 (1982), no. 1, 31–42.
- [53] Henry C. Wente, *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Anal. Appl. 26 (1969), 318–344.
- [54] Brian White, *Introduction to minimal surface theory*, Geometric analysis, IAS/Park City Math. Ser., vol. 22, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 387–438.
- [55] T. J. Willmore, *Riemannian geometry*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.
- [56] Miaomiao Zhu, *Harmonic maps from degenerating Riemann surfaces*, Math. Z. 264 (2010), no. 1, 63–85.
- [57] ———, *Regularity for harmonic maps into certain pseudo-Riemannian manifolds*, J. Math. Pures Appl. (9) 99 (2013), no. 1, 106–123.